Fachliche Stellungnahme im Zuge der bevorstehenden Änderung und Evaluierung der Lehrpläne aus Angewandter Mathematik für die BHS/HAK

Prof. Mag. Michael Toppel PhD MA[1]
13.03.2023

Inhalt

Einleitung 1
Sachbezug und Komplexitätsreduktion 2
Reine und angewandte Mathematik 2
Rechenkunst und Klosterschule 4
Konklusion und Empfehlungen 5
Einschränkungen und Nebenbemerkungen 5
Literaturverzeichnis 6

Einleitung

In meiner Doppelfunktion als Lehrer für Mathematik und Angewandte Mathematik an einer Wiener HAK[2] und Experte für logisch-semantische Fragen an der Schnittstelle zwischen mathematischer Formelsprache und der Alltagssprache[3] nehme ich mir die Freiheit meinen besonderen Blickwinkel und exklusiven Einsichten in die Diskussion einzubringen. Ich verfolge die Debatte um die Veränderung der Lehrpläne, seit der Grundstein für die Kompetenzorientierung unter Bundesminister Dr. Johannes Hahn gelegt wurde und glaube eine stoßende und zwei zurückhaltende Kräfte erkennen zu können. Die stoßende Kraft aus dem BMBWF scheint einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu wollen, der aufgrund seines Sachbezugs leichter für Schüler*innen verständlich sein sollte.[4] Diese Grundmotivation wird von einem großen Teil der aktiven Physiker*innen geteilt.[5] Die beiden zurückhaltenden Kräfte teilen sich auf in jene Mathematiker*innen, die um den Verlust der reinen Mathematik fürchten,[6] und die Lehrenden technischer Universitäten, die sich um die

[1] In Eigeninitiative
[2] Bundeshandelsakademie [redacted] (Anstellung seit September 2016)
[3] Siehe (Toppel, Applying Ramseyfication to Infrared Spectroscopy, 2021) und (Toppel & Ramharter, Buridan's Secular Demarcation of Logic, 2021).
[4] „Mathematik beißt nicht!" am 12.03.2008 in der Aula der Wissenschaften.
[5] (Freistetter, 2023)
[6] Evidenz lediglich durch persönliche Gespräche.

Rechenkunstfertigkeit der Studierenden sorgen.[7] Ich werde im Folgenden dafür argumentieren, dass keine dieser drei Kräfte die Vorzüge der derzeitigen kompetenzorientierten Lehrpläne voll erfasst und in Folge auf der Basis meiner hier erarbeiteten Standards Vorschläge für eine (nicht) Adaption machen.

Sachbezug und Komplexitätsreduktion

Das BMBWF scheint lange die Überzeugung vieler Physiker*innen geteilt zu haben, dass eine mathematische Formalisierung überhaupt nur oder zumindest leichter über ein physikalisches Modell oder einen sogenannten Sachbezug verstanden werden kann. Das ist aus einem einfachen Grund falsch. Das Verständnis einer Zeichenkette kann nur über die Grammatik der Zeichenkette passieren. Das trifft gleichermaßen auf Zeichenketten zu, die zeitliche Abfolgen von Lauten sind (gesprochene Sprache), als auch auf Zeichenketten, die Charaktere auf einer zweidimensionalen Ebene sind (geschriebene Sprache).[8] Für die Zeichenkette

(1) „Die Temperatur nach 8 Minuten ist 45°C."

gilt, dass sie nur verstanden werden kann, wenn die Subjekt-Prädikat-Objekt-Struktur erkannt wird.[9] Gleichermaßen gilt für die Zeichenkette

(2) „T(8)=45",

dass sie nur verstanden werden kann, wenn der funktionale Zusammenhang zwischen Stelle und Wert über die Funktion T und das Prädikat „=" erkannt wird.

Daher wird die Komplexität bei Hinzutreten eines Sachzusammenhangs nicht reduziert, sondern es treten zwei zusätzliche Erschwernisse hinzu: Es muss der Satz (1) verstanden werden, es muss die Formel (2) formuliert werden können und es muss über den Sachzusammenhang eine Übersetzungsrelation zwischen diesen beiden Zeichenketten (sprachlichen Repräsentationen, Sätze, Formeln, …) konstruiert werden.

Warum sich dennoch die Vorstellung hält, dass sich ein Sachzusammenhang positiv auf das Verständnis von Formelsprachen auswirkt, ist historisch bedingt und kommt nicht zufällig aus dem Umkreis der mathematischen Physik. Es war ein Charakteristikum der Physik nach Newton, dass sich eine noch unterentwickelte Mathematik parallel mit ihrer Anwendung und dem Fortschritt der Physik entwickeln musste. Die Mathematik konnte erst ca. 150 Jahre nach Newton auf eigenen Beinen stehen.[10] Dieser Vorgang ist erkenntnistheoretisch und wissenschaftsphilosophisch höchst interessant sowie für aktive Physiker*innen in der Forschung höchst fruchtbar, aber er reflektiert a priori keinen Lernpsychologischen Vorgang und ist daher didaktisch nicht ohne weiteres einsetzbar. Und tatsächlich nehmen wir in der Praxis auch wahr, dass sich Schüler*innen beim Erlernen von Formelsprachen durch das hinzuträten eines Sachzusammenhangs nicht leichter tun, sondern sich eine Erschwernis einstellt.

Reine und angewandte Mathematik

Man sollte aber deshalb nicht der reinen Mathematik den Vorzug geben. Das liegt zum einen daran, dass es sowieso kaum reine Mathematik in den Themenbereichen der Schulmathematik gibt, und zum anderen am Anspruch an die Schulen, den Schüler*innen ein Gefühl für (Sprach)Logik zu vermitteln.

[7] (APA, 2018)
[8] (Dutilh Novaes, 2012, S. 29-65)
[9] Alternativ kann auch die Syntaxtheorie von Noam Chomsky herangezogen werden.
[10] (Maddy, 2008)

Vollzieht man die notwendige Trennung zwischen reiner Mathematik und der Rechenkunst, dann lassen sich aus meiner Sicht nur die folgenden Inhalte aus der reinen Mathematik in den Lehrplänen finden:

1. Die Typisierung von Gleichungen über die Komplexität ihrer Terme (Lineare, quadratische, eine oder zwei Variablen, u.s.w. …)
2. Die Zuordnung von Lösungsverfahren zum Gleichungstypen
3. Die Verbindung zum Lösen von Gleichungen zu den Nullstellen verwandter Polynomfunktionen
4. Elementare Geometrie
5. Die Verbindung von elementarer Geometrie mit Funktionen über das Differenzial
6. Kurvendiskussionen
7. Wachstumsverhalten von Funktionen
8. Das Integral als Umkehrung vom Differenzial

Diese Inhalte werden aber auch in einem Mathematikunterricht mit Sachbezug natürlich und notwendig vermittelt. Der Mehrwert im Weglassen des Sachbezugs kann also nur in der Erweiterung des Raums für die Rechentechnik liegen. Dazu werde ich ihm nächsten Abschnitt etwas sagen.

Ich habe im vorhergehenden Abschnitt gesagt, dass der Sachbezug den Mathematikunterricht nicht leichter, sondern schwerer macht. Die Dimensionen dieser zusätzlichen Erschwernis wird von jenen, die sich um die Allgemeinbildung in der Abgrenzung zur Ausbildung sorgen machen, nur fälschlich als Anwendungswissen verstanden. Vom Blickwinkel der mathematischen Funktionentheorie mag die Übersetzungsrelation zwischen

(1) „Die Temperatur nach 8 Minuten ist 45°C."

und

(2) „T(8)=45"

wie eine Anwendung aussehen. Aus Sicht der Sprachphilosophie und Logik gibt es die logische Form des Satzes wieder; d.h. eine theoretische Einsicht in die Wahrheitsbedingungen des Satzes. Die logische Einsicht, dass Begriffe (hier Temperatur) durch Funktionen repräsentiert werden können, wurde zu einer zentralen Idee in der modernen Sprachphilosophie und Metaphysik. Meine eigene Arbeit ist ein Beispiel davon.[11] Diese Idee geht im Wesentlichen auf Gottlob Frege zurück,[12] hat aber ihre Vorläufer in den Schriften von Immanuel Kant.[13] Es mag zu viel erscheinen von BHS (oder auch AHS) Schüler*innen zu verlangen, sich eindringlich mit der Philosophie Kants oder moderner analytischer Philosophie zu beschäftigen. Aber das Metawissen über diese Dinge muss von der prinzipiellen Befähigung, die logische Form eines Satzes zu erkennen, unterschieden werden. Letzteres ist Allgemeinbildung und wird durch die Handlungsdimension A in Aufgaben im Mathematikunterricht mit Sachbezug eingeführt und trainiert. Wird der Mathematikunterricht damit auch zu einem Philosophie- oder Linguistikunterricht? Ja. Aber wo sonst sollte man diese Bildungsinhalte verorten, wenn nicht im Fach, wo Funktionen überhaupt eingeführt werden? Die Entwicklung ging aus meiner Sicht in die richtige Richtung und die Dinge stehen jetzt so, wie sie sein müssen, auch wenn diese so vielleicht nicht intendiert waren.

[11] (Toppel, Applying Ramseyfication to Infrared Spectroscopy, 2021)
[12] (Frege, 2007)
[13] (Hoeppner, 2011)

Dass das Einbringen dieser wichtigen Bildungsinhalte in den Mathematikunterricht vielen nicht klar war und ist, zeigen die Reaktionen in der Lehrerschaft und den Reaktionen von Seiten der Pädagogischen Hochschulen. Im Unterricht liegt der Fokus weiterhin vornehmlich auf der Operation mit den Formeln, während die Lehrer*innen die Deutschkenntnisse der Schüler*innen dafür verantwortlich machen, wenn Sätze nicht in Formeln übertragen werden können. Das liegt auch daran, dass die Lehrer*innen sich selbst nicht darüber im Klaren sind, dass sich hinter dem Übertragen eines Textes in eine Formelsprache mehr verbirgt als nur Heuristiken und die Deutschkenntnisse der Schüler*innen. Dies zeigt sich auch in den Maßnahmen, die über die Lehrerfortbildung an den PHs erfolgen. Das erhöhte Angebot an Fortbildungen zum sprachsensiblen Unterricht richtet sich vornehmlich an den Wortschatz der Schüler*innen bzw. die Lesefähigkeit von deutschen Sätzen und spart die logisch-semantische Brücke zur Formelsprache fast vollkommen aus. Es ist daher verständlich, dass viele meiner Lehrerkolleg*innen die sprachliche Komplexität der Angaben drastisch reduziert haben wollen, um sich wieder auf die Rechenkunst fokussieren zu können.

Rechenkunst und Klosterschule

Man sollte jetzt aus dieser Einsicht nicht voreilig den Schluss ziehen, den Sachzusammenhang bis zur Universität aufzuschieben und sich wieder vermehrt der Rechenkunst zu widmen. Ganz im Gegenteil, sollten diese Aspekte noch weiter in den Hintergrund treten, um den Schüler*innen mehr Raum zur Entwicklung dieser sprachlichen Fähigkeiten zu geben. In diesem Zusammenhang verstehe ich die Intentionen der Lehrenden aus der Technik, mehr „elementare Fertigkeiten“ zu fordern, nicht ganz.[14] Denn Wurzelausdrücke und Doppelbrüchen sind überhaupt nicht in jeder mathematischen Struktur definierbar und können daher schwer elementar sein. Abgesehen davon halte ich es wie die meisten Mathematiker, dass Formalismen dafür da sind die langweiligen und uninteressantes Denkschritte auszuklammern, damit man sich mit interessantem beschäftigen kann.[15] Das spart Lebenszeit. Was aber wirklich elementar für die Anwendung von Kalkülen aller Art ist und daher gelernt werden muss, ist, wie eine Formel oder ein Term gelesen werden und wie formale Operationen (Rechenregeln) angewendet werden können; und zwar unabhängig vom Rechenzeichen. Ganz konkret meine ich, dass die Termstruktur und die Funktion von Klammern erkannt werden müssen, wie es in den Beispielen in (Abb. 1) geübt wird.



(Abb. 1)[16]

Unter Berücksichtigung der Entwicklung der europäischen Bildungstradition aus der mittelalterlichen Scholastik muss es unstrittig sein, dass diese schematische Lesekompetenz ein zentraler Inhalt einer europäischen Allgemeinbildung ist.[17] Denn das Erkennen von Schemata in sprachlichen Zeichen wird schon durch die Syllogistik des Aristoteles in der Grundbildung der Sieben Freien Künsten an

[14] (APA, 2018)
[15] (Neuwirth, 2018)
[16] (Allerstorfer, Langer, & Siegl, 2015, S. 45)
[17] (Nonn, 2012, S. 81)

Klosterschulen unterrichtet und stand am Anfang und nicht am Ende einer Ausbildung zum Gelehrten im Mittelalter.[18] Weiters stellt das Erkennen der Termstruktur vor der Fülle der verwendeten Kalküle in der Gegenwart die eine besonders wichtige Fertigkeit in Rechengängen aller Art dar. Denn egal ob es sich um Terme in der Analysis oder der modernen Verbandstheorie handelt, das Rechenzeichen von Teiltermen unterscheiden zu können, ist die Voraussetzung, um eine schematisch definierte Rechenregel anzuwenden. Unabhängig von der oftmals stur eingeübten Rechenkunst mit $x + y, x - y, x \cdot y, \frac{x}{y}$, (,), und x^2 wird dies aber oft nicht beherrscht. Ich möchte das noch mal unterstreichen: es ist wertlos, wenn eine Schüler*in fehlerfrei Terme umformt aber nicht angeben kann, an welcher Stelle welche Rechenregel durch welche Einsetzungen angewendet wurde. Weil diese Kompetenz dann nicht auf andere Kalküle oder Formalismen übertragen werden kann. Damit ist ein Mathematikunterricht oder ein Benotungsschema fehlgeleitet, wenn er oder es einen fehlerfreien, aber unbegründeten Rechengang höher bewertet als einen begründeten mit „Schlampigkeitsfehlern". Das ist keine Frage eines vorherrschenden Zeitgeistes (wie oft behauptet wird), sondern ein konsequentes Weiterführen europäischer Bildungsstandards seit dem Frühmittelalter, wie ich bereits angemerkt habe.

Konklusion und Empfehlungen

Die zwei Faktoren des Mathematikunterrichts, Sachbezug und Rechenkunst, wurden von mir anders bewertet als deren übliche Befürworter. Ich habe in beiden Fragestellungen logisch-semantische Aspekte herausgearbeitet. Im Fall des Sachbezuges stellt das Erfassen einer Übersetzungsrelation über das Erkennen eines funktionalen Zusammenhangs eine zusätzliche Lernerschwernis dar. Im Falle der Rechenkunst kann aber Zeit eingespart werden, da man das Erkennen von Schemata gegenüber des fehlerfeien Rechnens aufwerten sollte; damit fällt Übungszeit weg. In beiden Fällen ist es mir wichtig, dass mein Hervorheben logisch-semantischer Aspekte keinem modernen Zeitgeist folgt, sondern wesentliche Inhalte der europäischen Bildungstradition seit den frühmittelalterlichen Klosterschulen aufgreift, d.h. den Fokus auch auf logisch-semantische Momente in Teilen der voruniversitären Bildung zu legen.

Ich empfehle die Wiederholung der Rechentechnik aus der NMS und AHS-Unterstufe im 1. Jahrgang HAK stark einzuschränken. Damit soll mehr Zeit für das Formulieren von Gleichungen sowie die Einführung des Funktionsbegriffs geschaffen werden; für die gegen Ende des Schuljahres oft kaum mehr Zeit bleibt.

Das Interpretieren von Formeln, Gleichungen und Ergebnissen muss natürlich auch aus den von mir genannten Gründen weiterhin einen hohen Stellenwert haben, ist es doch nur die Umkehrung von dem von mir beschriebenen.

Ich empfehle aber auch, an den PHs Fortbildungen anzubieten, die Lehrer*innen darin unterstützen auf Basis grammatischer Verhältnisse im Satz logische Zusammenhänge im Unterricht für die Schüler*innen herauszuarbeiten, bevor diese in die Formelsprache übersetzt werden. Dies kann und soll ohne die Einführung von Konzepten aus der formalen Logik geschehen, sondern lediglich die Begriffsverwendung in der Alltagssprache umfassen.

Einschränkungen und Nebenbemerkungen

Betrachtet man die Modellierungsbeispiele (Handlungsdimension A) wie ich es für den Satz

„Die Temperatur nach 8 Minuten ist 45°C."

[18] (Kintzinger, 2003, S. 135)

getan habe. Dann fällt auf, dass eine Aufgabenstellung, die den Zeitpunkt der maximalen Geschwindigkeit eins Objekts bei gegebener Wegfunktion zum Inhalt haben, den üblichen Rahmen sprengen. Der Grund dafür ist, dass nicht nur die logische Form erkannt, sondern auch ein Kettenschluss durchgeführt werden muss. Der Begriff der Geschwindigkeit als 1. Ableitung des Weges und der des Maximums als Nullstelle der 1. Ableitung der Geschwindigkeit muss verbunden werden, um zur maximalen Geschwindigkeit als die Nullstelle der 2. Ableitung des Weges zu kommen. Diese Anforderung einer metatheoretischen Überlegung über technische Begriffe ist ein Ausnahmefall im Lehrplan. Normalerweise werden theoretische Überlegungen als eigene Handlungsdimension D ausgesondert. Aber dieser Metaschluss über theoretische Begriffe wird undifferenziert sogar nur als Handlungsdimension B eingeordnet. Ich weiß, dass dies mit der geometrischen Einsicht über den Wendepunkt begründet wird. Aber hier treffen wir auf dieselbe Schwierigkeit, wie sie bereits bei der Übersetzungsrelation zwischen Satz und Formel aufgetreten ist. Dass nun auch ein Bild mit beiden verbunden werden muss, macht die theoretische Einsicht aus der Angabe nicht leichter. Das überfordert Schüler*innen und führt dazu, dass die Verwendung der 2. Ableitung nur auswendig gelernt wird. Die Sinnhaftigkeit davon mag zu bezweifeln sein.

Zusätzlich und unabhängig von dem Gesagten plädiere ich außerdem für ein Vorziehen der beschreibenden Statistik in den 2. Jahrgang HAK um Synergieeffekte mit den Naturwissenschaften möglich zu machen. Die Regressionsanalyse ist eine wesentliche Kompetenz, um den Modellcharakter von wissenschaftlichen Theorien zu verdeutlichen und sollte beibehalten werden. Allerdings sehe ich keinen guten Grund die Lorenzkurve und den Gini-Koeffizienten im Lehrplan zu behalten.

Literaturverzeichnis

Allerstorfer, C., Langer, M., & Siegl, A. (2015). *Angewandte Mathematik@HAK 1.* Linz: Veritas-Verlag.

APA. (20. Juni 2018). *TU Wien beklagt geringe Mathe-Kenntnisse von Maturanten.* Von derstandard.at: https://www.derstandard.at/story/2000081917738/tu-wien-beklagt-schwindende-mathe-faehigkeiten-von-maturanten abgerufen

Dutilh Novaes, C. (2012). *Formal Languages in Logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

Frege, G. (2007). *Funktion-Begriff-Bedeutung.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Freistetter, F. (5. Februar 2023). *Die Überheblichkeit eines Mathematikers prägt das Fach bis heute.* Von Spektrum.de: https://www.spektrum.de/kolumne/die-ueberheblichkeit-von-edmund-landau-praegt-das-fach-bis-heute/2104482 abgerufen

Hoeppner, T. (2011). Kants Begriff der Funktion und die Vollständigkeit der Urteils- und Kategorientafel. *Zeitschrift für philosophische Forschung*, S. 193-217.

Kintzinger, M. (2003). *Wissen wird Macht. Bildung im Mittelalter.* Osfildern: Jan Thorbecke Verlag.

Maddy, P. (2008). How Applied Mathematics Became Pure. *The Review of Symbolic Logic, 1*(1), 16-41.

Neuwirth, E. (22. Juni 2018). *Welche Mathematik sollen Maturanten beherrschen?* Von derstandard.at: https://www.derstandard.at/story/2000082104160/welche-mathematik-sollen-maturanten-beherrschen abgerufen

Nonn, U. (2012). *Mönche, Schreiber und Gelehrte. Bildung und Wissenschaft im Mittelalter.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Toppel, M. (2021). Applying Ramseyfication to Infrared Spectroscopy. *Erkenntnis*. Von https://doi.org/10.1007/s10670-021-00506-6 abgerufen

Toppel, M., & Ramharter, E. (2021). Buridan's Secular Demarcation of Logic. *Philosophia*, 1267–1288.