Introdução às Singularidades via Teoria das Catástrofes

Curso de Verão 2025 - Aula IV

Inácio Rabelo

https://inaciorabelo.owlstown.net

21/01/2024

Teorema de Thom

Teorema (Catástrofes de Thom)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma deformação versal tal que* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Então,* V *é* $\mathcal{P}-\mathcal{R}^+$*-equivalente a uma, e somente uma, das deformações abaixo:*

Tipo	***Singularidade***	***Deformação Versal***	***Nome***
A_2	x^3	$x^3 + u_1x$	*Ponto*
A_3	x^4	$\pm x^4 + u_2x^2 + u_1x$	*Cúspide*
A_4	x^5	$x^5 + u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Rabo de Andorinha*
A_5	x^6	$\pm x^6 + u_4x^4u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Borboleta*
D_4^-	$x^3 + y^3$	$x^3 - xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2y + u_1x$	*Hiperbólica Umbílica*
D_4^+	$x^3 + 3xy^2$	$x^3 + y^3 + u_3xy + u_2y + u_2x$	*Elíptica Umbílica*
D_5	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + u_4y^2 + u_3x^2 + u_2y + u_1x$	*Parabólica Umbílica*

Arco de Euler I

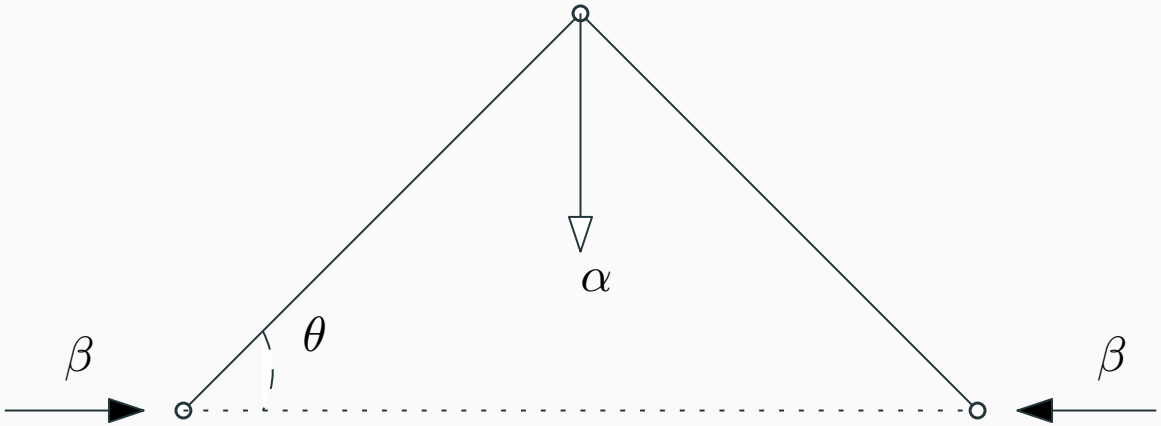


Figura 1: Arco de Euler

- Estado descrito pelo ângulo θ.
- Variáveis de deformação ou controle são α, β.
- A relação das intensidades pode levar a uma ruptura.
- Assumindo a estabilidade estrutural, temos uma catástrofe do tipo cúspide.

Arco de Euler II

- Energia potencial: $2\mu\theta$, μ coeficiente do material.
- Energia do corpo α: $\sin\theta$.
- β equilibra a força α.
- A energia total é

$$V(\theta) = 2\mu\theta^2 + \alpha\sin\theta - 2\beta\cos\theta.$$

- Assumindo estabilidade estrutural, temos uma catástrofe do tipo cúspide.

Considerações

- Catástrofe: situação discontínua de aumento de volume.
- Representa catástrofe do tipo cúspide?
- Para um ponto de discontinuidade P_τ, uma mudança em V não altera significativamente a pressão.
- Isso implica que o gráfico abaixo é mais próximo do real.

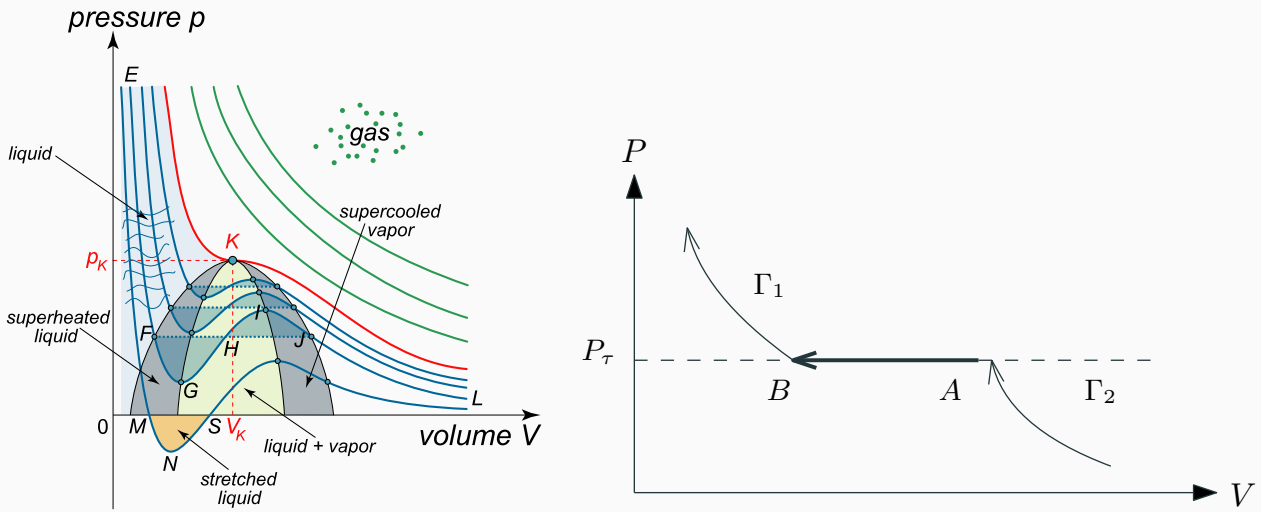


Figura 2: Pressão e volume para diferentes temperaturas e transição de fase

Falha da Histerese

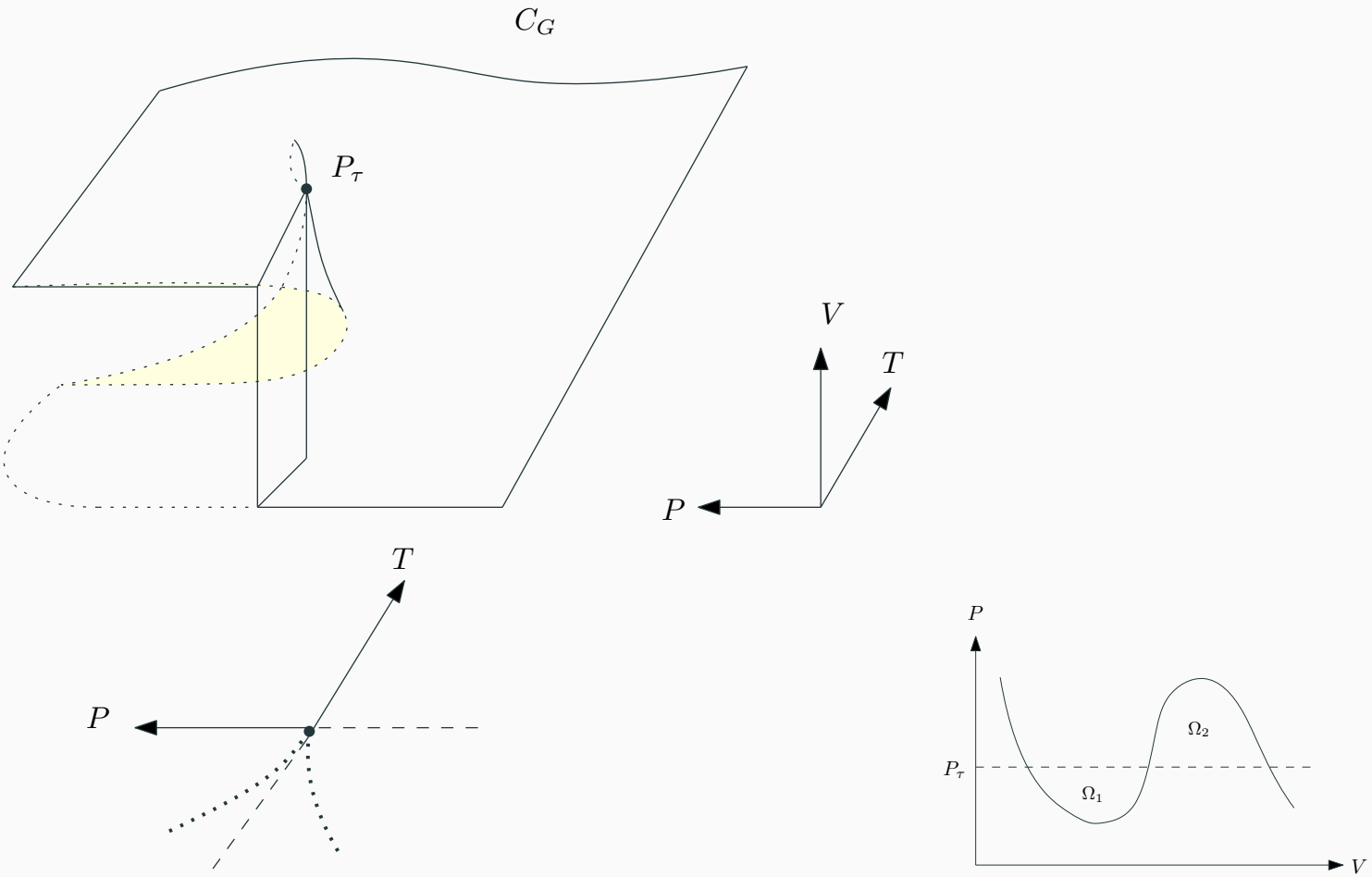


Figura 3: Geometria real da cúspide e estado intermediário líquido-vapor

Catástrofes na Configuração Geral

- Estrelas são corpos celestes formados por gases.
- Quando seu combustível (hidrogênio) acaba, significativamente sofre somente a ação de F_g.
- Isso resulta em aumento da densidade central.
- Resulta na transformação da estrela em anã branca ou buraco negro.

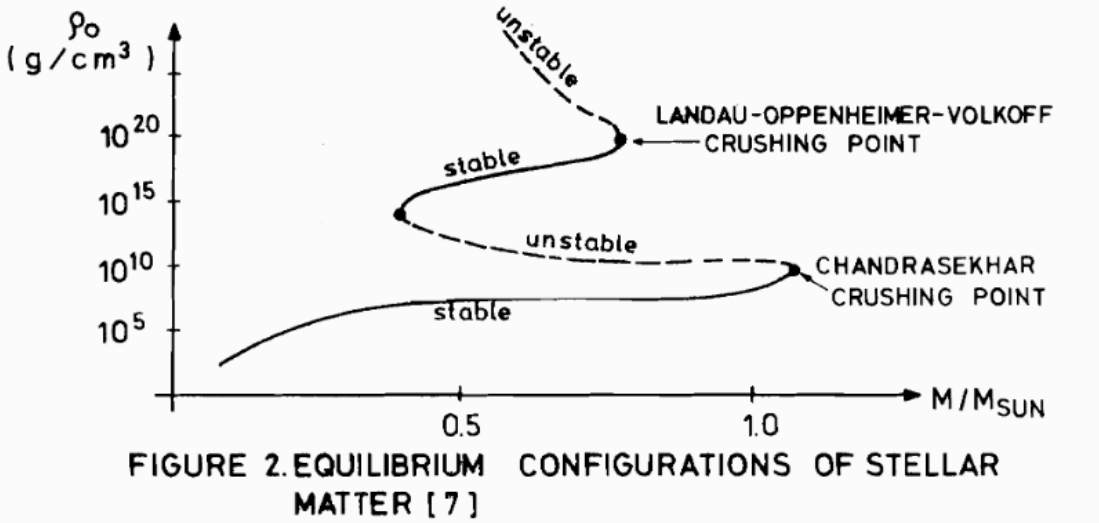


Figura 4: Estados de equilíbrio de uma estrela com parâmetros massa e densidade

Primeira Conclusão

- Temos dois parâmetros de controle.
- Cada um dos limites representa discontinuidade.
- Admitindo estabilidade estrutural, obteríamos duas cúspides sobrepostas.

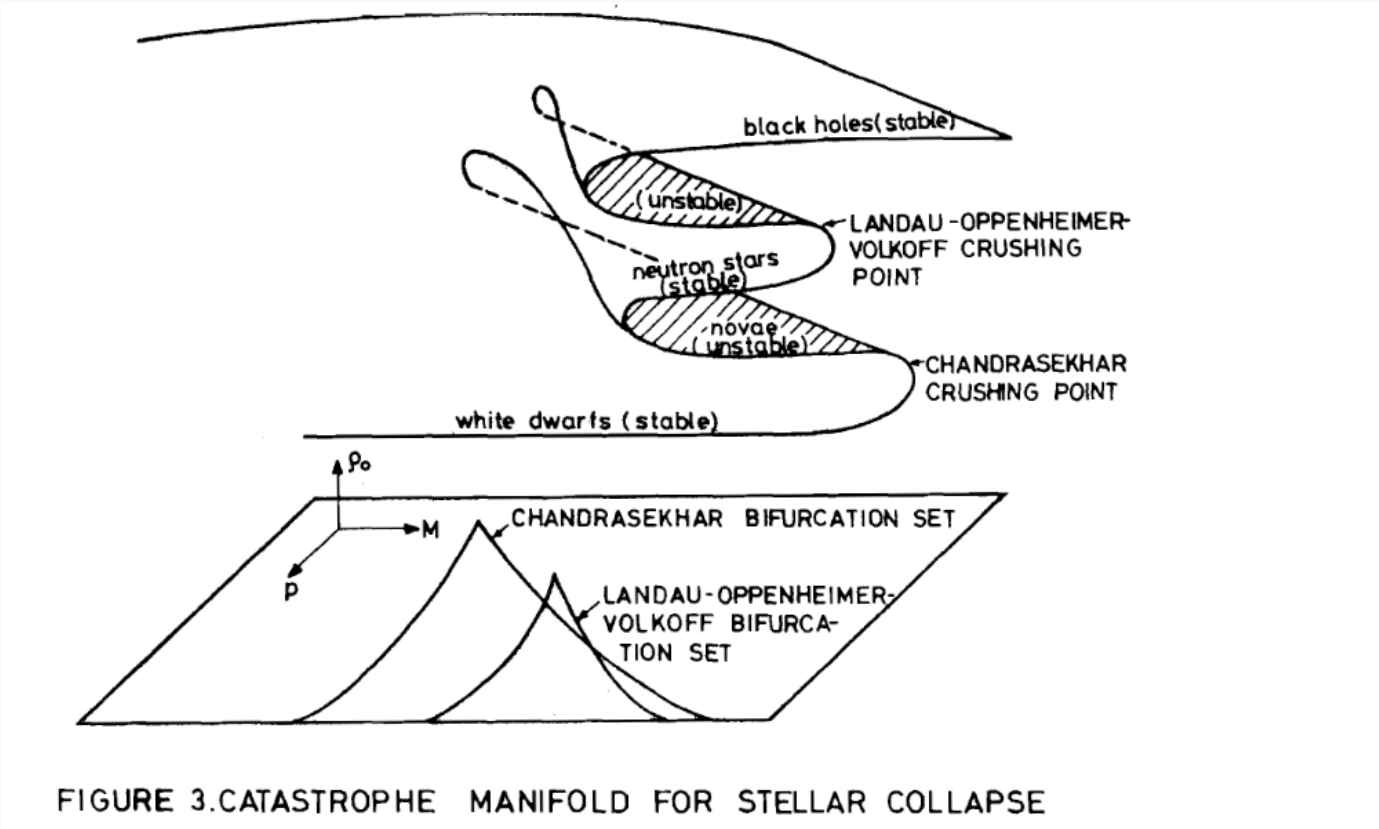


Figura 5: Sobreposição de Catástrofes Estelares

Princípios e Aplicações

Fenômeno	**Potencial**	**Maxwell**	**Retardamento**
Mecânica	Funcional de energia	Princípio de Hamilton	Potencial gravitacional
Gravitação	Campo Gravitacional	-	Atração de corpos
Eletrostática	Campo Elétrico	-	Potencial elétrico
Raios de Luz	Funcional de tempo	Fermat	-
Transição de Fase	Função de Gibbs	Energia Mínima	2ª Lei da Termodinâmica
Sistemas Estelares	Hidrostático	Energia Mínima	-

Determinação Finita

The analysis of the conditions for a map-germ to be finitely determined and of the degree of determinacy involves the most important of the local aspects of singularity theory.

C.T.C. Wall, Finite Determinacy of Smooth Map Germs, 1981.

- Ação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{E}_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ (\phi, f) &\longmapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

- No entanto, $\mathcal{R}$ não é um grupo de Lie e tampouco $\mathcal{E}_n$ uma variedade suave.
- A determinação finita reduz essa ação a uma ação de uma variedade em um grupo de Lie.
- Ou ainda, como podemos aproximar germes por truncamentos de seus polinômios de Taylor.

Espaço Tangente

Definição
Seja $f \in \mathcal{E}_n$. O espaço tangente à órbita de f em $C^\infty(n)$ é definido como o ideal

$$L\mathcal{R}_e.f := \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathcal{E}_n\,.$$

Lema (Hadamard)
Seja $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}_{n+k}$ o ideal dos germes tais que $f_{|\,\mathbb{R}^n \times 0} = 0$. Então $\mathfrak{m}_k$ é gerado pelas funções coordenadas y_i, onde as coordenadas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ são $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$.

Esquema.
Temos que

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,ty)dt = \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(x,ty)}{\partial x_i}.y_i dt.$$

Lema Técnico e Motivação

Lema
Seja G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade M e suponha que as órbitas sejam subvariedades mergulhadas. Então, o mapa $\phi_x : G \longrightarrow G.x$ é uma submersão. Em particular, $T_x(G \cdot x) = (d\phi_x)_e(T_eG)$.

- Seja $\gamma^{-1} : (0,1) \longrightarrow \mathcal{R}$ uma curva passando pela função identidade em $\mathcal{R}$.
- Ou seja, $\gamma(0)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Por Hadamard, isso implica que

$$\gamma(t)(x) = (x_1 + th_1(x,t), \ldots, x_n + th_n(x,t)).$$

- O vetor tangente é

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(f \circ \gamma^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i(x,t),$$

- Onde $h_i(x,t) \in \mathfrak{m}_n$.

Definições

Definição

1. *A $\mathcal{R}_e$-codimensão é definida como* $\mathcal{R}_e - \text{codim} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$.
2. *A $\mathcal{R}$-codimensão é definida como* $\mathcal{R} - \text{codim} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n \cdot J_f}$.

Definição
Seja $f \in \mathcal{E}_n$.

1. *Denotamos por $j^k(f)$ o k-jato de f na origem, ou seja, o polinômio de Taylor de f centrado na origem truncado até ordem k.*
2. *O espaço de todos os possíveis k-jatos é denotado por $\mathcal{J}^k(n)$.*
3. *Dizemos que f é finitamente determinado se existe um inteiro k tal que $f \sim_{\mathcal{R}} g$ para todo $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(f) = j^k(g)$.*
4. *Dizemos que f é k-finitamente determinado se f é finitamente determinado e k é o menor inteiro satisfazendo a condição acima.*

Condições Algébricas

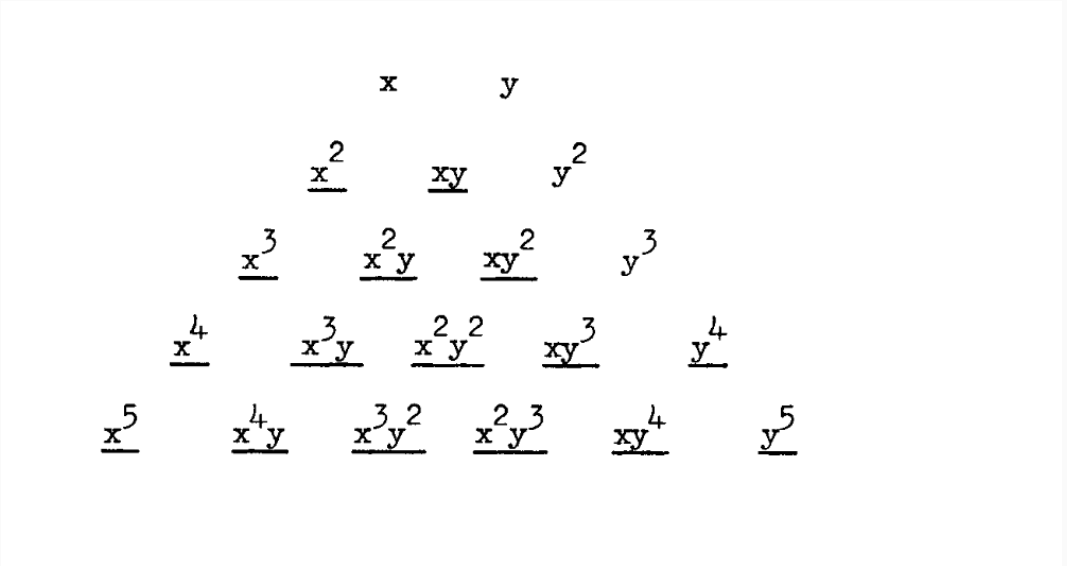
- Seja $\mathfrak{m}_n \subset \mathcal{E}_n$.
- Pelo Lema de Hadamard, temos que

$$\mathfrak{m}_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

- Então, $\mathfrak{m}_n^k = \mathfrak{m}_n \ldots \mathfrak{m}_n$ é gerado por todos os monômios de ordem k:

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_2}.$$

- Por exemplo:



Exemplo I

- Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2$.
- Tem-se que $L\mathcal{R}_e.f = \langle 2x_1, \ldots, 2x_n \rangle = \mathfrak{m}_n$.
- Então, f é 2-determinado.
- Ou seja, qualquer $g \in \mathcal{E}_n$ tal que $j^2(g)(0) = f$ é tal que

$$f \sim_{\mathcal{R}} g.$$

- Isso equivale ao Lema de Morse.

Exemplo II

- Seja $f(x,y) = y^3 + x^2y \in \mathcal{E}_2$.
- Defina $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \frac{\partial f}{\partial y}$.
- As seguinte esqueção se verificam:

$$x^3 = x.B - \frac{3}{2}.y.A$$
$$y^3 = \frac{1}{3}\left(y.B - \frac{1}{2}.x.A\right)$$
$$x^2y = \frac{1}{2}.x.A$$
$$xy^2 = \frac{1}{2}.y.A$$

- Logo, $\mathfrak{m}_2^3 \subset L\mathcal{R}_e\,.f$.
- Assim, f é 4-determinado.

Propriedades de Jatos

Proposição
Sejam $f \in \mathcal{E}_n$ *e* $g \in \mathcal{E}_{n,n}$. *Então, vale que*

$$j^k(f \circ g) = j^k\left(j^k(f) \circ j^k(g)\right).$$

Definição

1. $\mathcal{R}_k = \left\{h \in \mathcal{R} : j^k(h) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\right\}$.
2. $\mathcal{R}_l^k = \mathcal{R}_l \,/\, \mathcal{R}_k$, *onde* $l < k$.
3. $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \,/\, \mathcal{R}_k$.

Ação induzida

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^k \times J^k(n) &\longrightarrow J^k(n) \\ (h, f) &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) \end{aligned}$$

Teorema de Arnold

Definição
Seja $f \in \mathcal{E}_n$ finitamente determinado e $F(x,u) = f_u(x)$ sua deformação versal. Dizemos que f é simples se existe um número finito de $\mathcal{R}$-órbitas tal que todos os germes deformados $f_u(x)$ pertencem a uma dessas classes.

Teorema (Arnold)
Seja $f \in \mathfrak{m}_n^2$ um germe simples e finitamente determinado. Então f é equivalente a uma, e somente uma, das singularidades abaixo a menos da soma por uma forma quadrática $q(z)$. Além disso, todo germe abaixo é simples.

Tipo	***Forma Normal***	$\mathcal{R}_e - \text{codim}$
$A_k^{\pm}, k \geq 1$	$\pm x^{k+1} + q(z)$	k
$D_k^{\pm}, k \geq 4$	$x^2 y \pm y^{k-1} + q(z)$	k
$E_6^{\pm}$	$x^3 \pm y^4 + q(z)$	6
E_7	$x^3 + xy^3 + q(z)$	7
E_8	$x^3 + y^5 + q(z)$	8

Nova equivalência

Grupo $\mathcal{L}$
O grupo de translações à esquerda, denotado por $\mathcal{L}$, consiste dos germes de difeomorfismos em $\mathcal{E}_{p,p}$. Sua ação sobre $\mathcal{E}_{n,p}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \times \mathcal{E}_{n,p} &\longmapsto \mathcal{E}_{n,p} \\ (\phi, f) &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

Grupo $\mathcal{A}$
O grupo $\mathcal{A}$ é descrito por $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ e sua ação por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{E}_{n,p} &\longmapsto \mathcal{E}_{n,p} \\ (\psi, \phi, f) &\longmapsto \phi \circ f \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

Descrição
Assim, $f, g \in \mathcal{E}_{n,p}$ são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, existem germes de difeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ em $\mathcal{R}$ e $\phi : (\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que

$$g = \phi \circ f \circ \psi^{-1}.$$

Exemplos

- Se $f \sim_{\mathcal{R}} g$, então $f \sim_{\mathcal{A}} g$, pois:

$$f = g \circ \phi = g \circ \phi \circ \mathrm{Id}.$$

- Seja $f(x, y) = (f_1, f_2)$, onde $f_i \in \mathcal{E}_2$.

- Defina $\phi(x, y) = (y, x) \in \mathcal{L}$, então

$$f \sim_{\mathcal{L}} (f_2, f_1).$$

- Defina $\phi(x, y) = (x - y, x) \in \mathcal{L}$, então

$$(x^2 + xy, xy) \sim_{\mathcal{L}} (x^2, x^2 + xy).$$

Definições I

Definição
Seja $F \in \mathcal{E}_{n,p}$, onde denotamos o i-ésimo vetor coluna da matriz Jacobiana de F por $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

1. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{R}$ é definido como:*

$$L\,\mathcal{R}_e\,.F = \left\{ \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} : \xi_i \in \mathcal{E}_n \right\}.$$

2. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{L}$ é definido como:*

$$L\,\mathcal{L}_e\,.F = \{\eta \circ F : \eta \in \mathcal{E}_p\,\Theta_p\}\,.$$

3. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{A}$ é definido como o seguinte subconjunto de Θ_F:*

$$L\,\mathcal{A}_e\,.F = L\,\mathcal{R}_e\,.F + L\,\mathcal{L}_e\,.F.$$

Definições II

Definição
Seja $F = (f^1, \ldots, f^k) \in \mathcal{E}_{n,p}$.

1. *Denotamos por* $j^k(F)$ *o k-jato de* F *na origem, ou seja, o mapa polinomial cujas funções coordenadas são os k-jatos das funções coordenadas de* F*:*

$$j^k(F) = \left(j^k f^1, \ldots, j^k f^p\right).$$

2. *O espaço de todos os possíveis k-jatos de germes de* $\mathcal{E}_{n,p}$ *é denotado por* $J^k(n,p)$.

Definição
As codimensões relativas ao grupo $\mathcal{A}$ *são definidas como:*

1. $\mathcal{A} - \operatorname{codim}(F) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{m}_n \Theta_F}{L\mathcal{A}.F}$.
2. $\mathcal{A}_e - \operatorname{codim}(F) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\Theta_F}{L\mathcal{A}_e.F}$.

Teorema de Whitney

Teorema (Whitney)
Seja $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ *um germe de coposto 1 e* $\mathcal{A}_e$*-codimensão menor ou igual a 2. Então* F *é* $\mathcal{A}$*-equivalente a uma das formas normais da tabela abaixo.*

Classe	***Forma Normal***	$\mathcal{A}_e$***-codimensão***	***Nome***
A_0	(x, y)	*0*	*Difeo local*
A_1	(x, y^2)	*0*	*Dobra*
A_2	$(x, y^3 + xy)$	*0*	*Cúspide*
A_2	$(x, y^3 + x^2y)$	*1*	*Lábios (lips)*
A_2	$(x, y^3 - x^2y)$	*1*	*Bicos (beaks)*
A_2	$(x, y^3 + x^3y)$	*2*	*Ganso*
A_3	$(x, y^4 + xy)$	*1*	*Rabo de Andorinha (swallow taill)*
A_3	$(x, y^4 + x^2y + y^5)$	*2*	*Gaivota*
A_4	$(x, y^5 + xy + y^7)$	*2*	*Borboleta*

Motivação

- Localmente, essas singularidades podem ser vistas como projeções de superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$.

- O Teorema implicará que as singularidades que ocorrem genericamente são dobras e cúspides.

- Qualquer outra se degenera para uma destas.

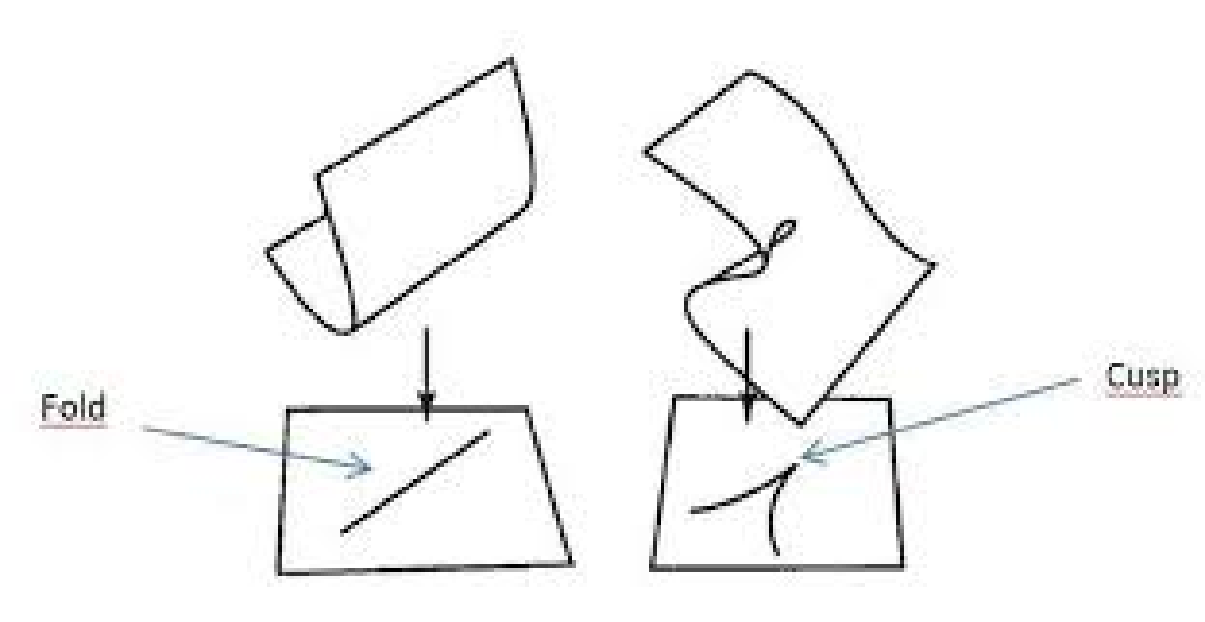


Figura 6: Projeções genéricas de superfícies no plano

Conclusão

- Os únicos germes estruturalmente estáveis da $\mathcal{A}$-equivalência são a dobra e a cúspide.

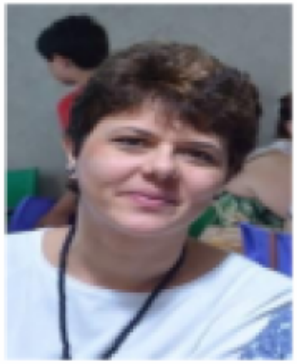
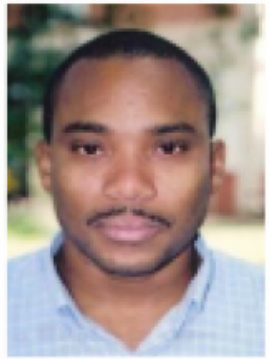
- O conjunto de tais órbitas é denso no espaço $C^\infty(n, p)$.

- Dobras e cúspides são singularidades genéricas.

O grupo de Singularidades do ICMC





Obrigado pela atenção!