

Correction TD Electrostatique

C. Leblanc et I. Septembre

2021-2022

Série A

I. Dipôle électrostatique

(a) Un dipôle électrostatique est composé de deux points N et P portant des charges opposées $\mp q$ (respectivement). Le moment dipolaire vaut $\vec{p} = q\vec{NP}$. L'approximation dipolaire est valide lorsque l'on étudie un point M suffisamment éloigné du dipôle. On peut l'écrire $OM \gg NP$, où O est l'origine du repère.

(b) Certaines molécules, même neutres, sont polaires lorsque les barycentres respectifs des charges positives et négatives ne sont pas confondus. Une molécule polaire a donc un moment dipolaire non nul.

(c) Pour estimer l'ordre de grandeur, on peut utiliser les normes. On prend une charge élémentaire $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et une longueur de liaison approximative de $d = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$. On a alors $p = qd = 1,6 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$, autrement dit $p \approx 5 \text{ D}$, donc proche de l'unité en Debye. C'est donc une unité bien adaptée.

(d) Les molécules d'eau et d'ammoniac sont polaires tandis que les autres sont apolaires. Cela vient de la répartition des charges, qui créent un moment dipolaire pour H_2O et NH_3 mais pas pour les autres (voir figure 1(c)).

II. Moment dipolaire de la molécule d'eau

(a) Voir figure 1(a).

(b) Voir figure 1(b). Pour calculer le moment dipolaire de l'eau, on peut considérer le dipôle formé par les barycentres respectifs des charges positives et négatives. Le barycentre des charges négatives est situé sur l'atome d'oxygène car c'est la seule charge négative. Le barycentre des charges positives est situé entre les deux atomes d'hydrogène car chacun porte la même charge positive. Au total, en utilisant la formule du moment dipolaire vue précédemment, on voit que le moment dipolaire est orienté selon l'axe y , dans le sens positif car "on va de la charge négative vers la charge positive". La charge totale est $q = 2\delta$. La longueur l à considérer peut être calculée grâce à la trigonométrie. La distance entre un atome d'hydrogène et un atome d'oxygène d est connue. On utilise la trigonométrie et on trouve $l = d \cos(\alpha/2)$ où α est l'angle **total** formé par la molécule. On a donc $\vec{p} = q\vec{l} = 2\delta d \cos(\alpha/2) \vec{y}$. Pour l'application numérique, on a donc : $p = 2\delta d \cos(\alpha/2) = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C.m} = 1,85 \text{ D}$.

(c) L'eau et l'huile sont immiscibles car l'eau est polaire et l'huile apolaire.

(d) En frottant le morceau de matière plastique avec un chiffon sec, on crée un excédent de charges à la surface du plastique. Comme la molécule d'eau est polaire, cet excédent de charges, qui crée un champ électrostatique, produit une force sur l'eau qui l'attire. En revanche, la

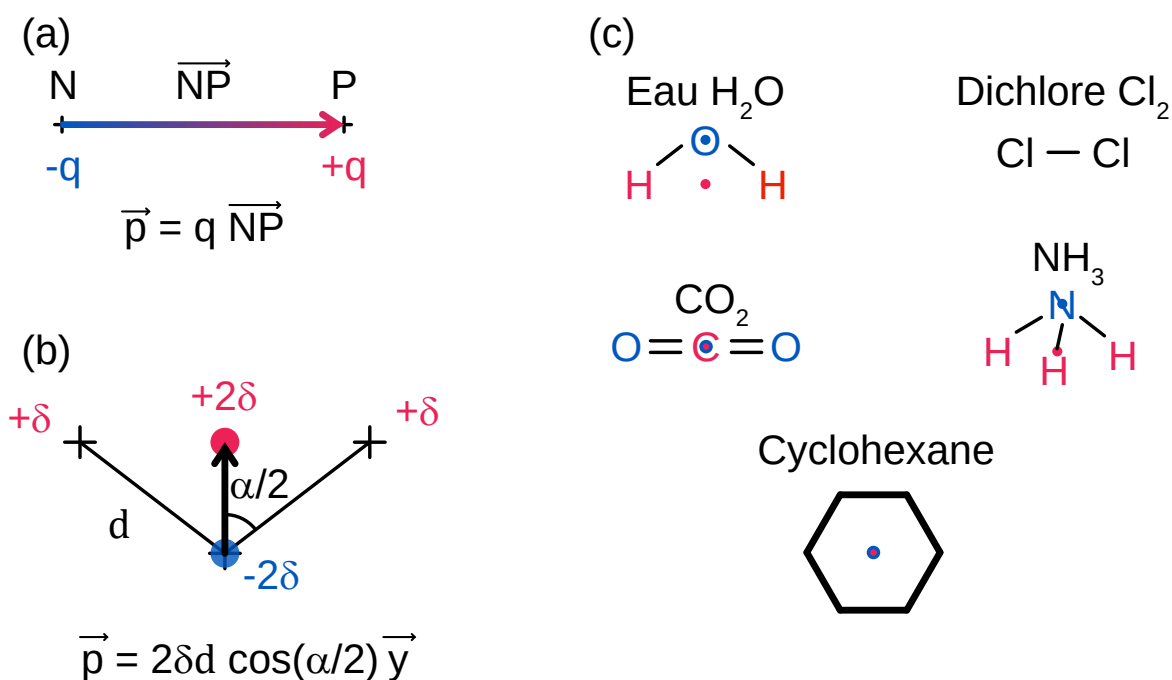


FIGURE 1 – (a) Schéma expliquant le moment dipolaire. (b) Calcul du moment dipolaire pour la molécule d'eau. (c) Schéma des différentes molécules étudiées. Les points rouges (respectivement bleus) sont les barycentres des charges positives (respectivement négatives).

molécule de cyclohexane est apolaire (voir figure 1(c)), donc le champ électrostatique généré par le morceau de plastique ne l'affecte pas.

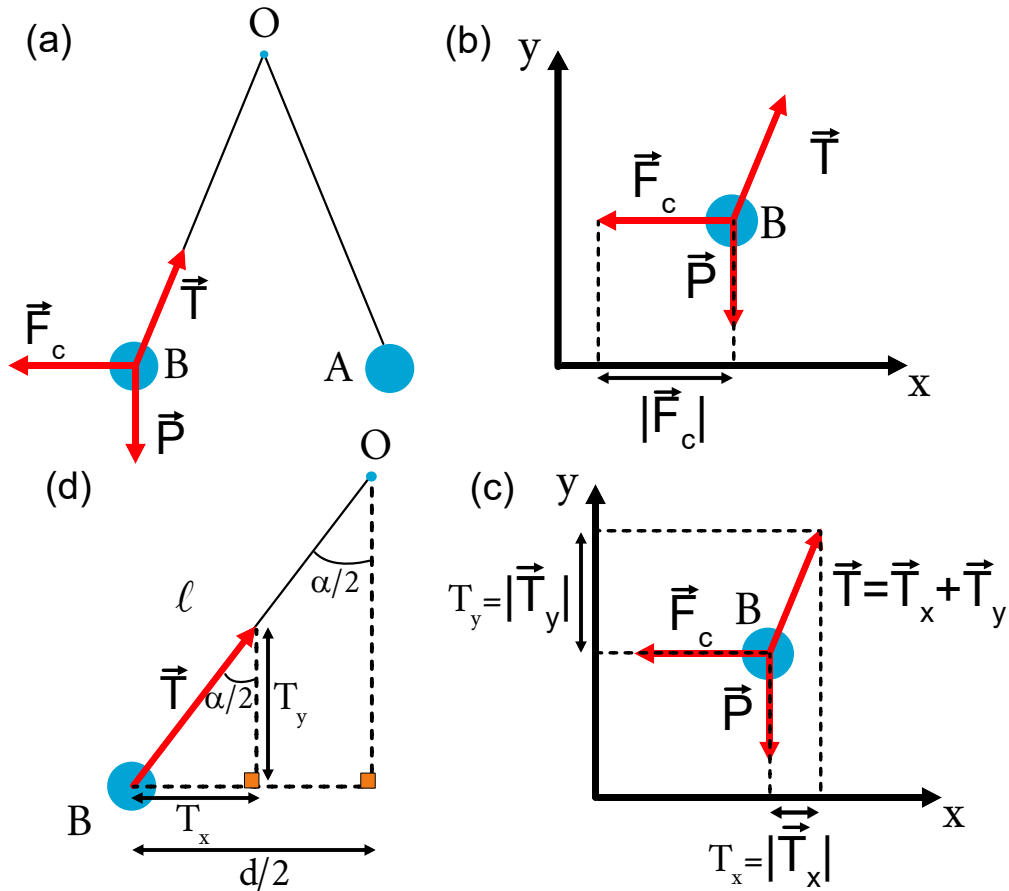


FIGURE 2 – (a) Schéma de l'électroscope. (b) Projection de la force de Coulomb F_c sur l'axe des abscisses. (c) Projection de la force de tension T sur les deux axes. (d) Calcul des longueurs T_x et T_y , ainsi que de l'angle α grâce au théorème de Pythagore.

Série B

I. Electroscope

(a) Les sphères A et B ont chacune la même charge Q . Nous savons grâce à la force de Coulomb que deux charges de même signe se repoussent. Ainsi, la répulsion entre les deux sphères est due à la force de Coulomb entre les deux sphères chargées.

(b) Les deux sphères sont à l'équilibre (voir fig 1.a). On peut donc appliquer le fait que la somme des forces sur un objet à l'équilibre est égal à zéro. Considérons une des sphères immobiles (la sphère B par exemple) :

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{T} = \vec{0} \quad (1)$$

Travailler avec des vecteurs est compliqué en général, on préfère travailler avec des nombres (donc avec des normes de vecteur). Pour remplacer ces vecteurs en nombre il faut projeter (voir fig. 1.b.c) l'équation sur les axes (Ox) et (Oy). Cela va nous donner deux équations qui sont liées l'une à l'autre, on appelle ça un système composé de deux équations :

$$\begin{cases} -P + T \cos(\alpha/2) = 0 \\ -F_c + T \sin(\alpha/2) = 0 \end{cases}$$

Ici, il faut se poser la question : "qu'est-ce que je ne connais pas dans ce système?". La réponse est la tension T , qui n'est pas donnée dans l'énoncé. Pour la faire "disparaître", il faut l'isoler dans une équation (l'équation du haut par exemple) et ensuite écrire son expression dans l'autre équation. Cela donne ceci :

$$\begin{cases} T = \frac{P}{\cos(\alpha/2)} \\ -F_c + \frac{P}{\cos(\alpha/2)} \sin(\alpha/2) = 0 \end{cases}$$

Ici T a disparu dans l'équation du bas : c'est ce qu'on voulait ! On peut simplifier encore un petit peu le système :

$$\begin{cases} T = \frac{P}{\cos(\alpha/2)} \\ F_c = P \tan(\alpha/2) \end{cases}$$

Je n'ai pas non plus isolé la force de Coulomb pour rien dans l'équation du bas : je sais que je cherche à exprimer Q en fonction des autres variables, donc à la fin je dois isoler Q dans le système. On commence par écrire explicitement toutes ces forces :

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{\cos(\alpha/2)} \\ K \frac{Q^2}{d^2} = mg \tan(\alpha/2) \end{cases}$$

et donc finalement :

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{\cos(\alpha/2)} \\ Q = \sqrt{\frac{d^2}{K} mg \tan(\alpha/2)} \end{cases}$$

Une seule chose nous manque ici, c'est l'angle α ! L'idée ici est de faire apparaître des triangles rectangles pour pouvoir appliquer Pythagore. (voir fig. 1.d) On se rend compte que

$$\sin(\alpha/2) = \frac{\text{oppose}}{\text{hyp}} = \frac{d/2}{l}$$

et donc

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{d/2}{l}\right)$$

Voilà ! On connaît α , g , m , d et K , on peut donc trouver Q (attention aux unités !). Une application numérique donne :

$$Q = 2.98 \times 10^{-10} \text{ C}$$

ou encore en terme de charges élémentaires :

$$Q = 1.86 \times 10^9 q_e$$

Le rapport entre P et F_c est

$$\Re = \frac{P}{F_c} = \frac{mg}{KQ^2/d^2} \approx 5$$

Cela ne paraît pas vraiment cohérent avec le fait que l'interaction coulombienne est 10^{40} plus intense que l'interaction gravitationnelle. En fait, c'est normal, puisqu'on a comparé l'interaction coulombienne de deux sphères chargées avec l'interaction gravitationnelle d'une sphère chargée avec la Terre ! Il aurait fallu comparer l'interaction coulombienne **ET** l'interaction gravitationnelle des deux sphères entre elles (et non avec la Terre).

II. Carte de champ

(a) Les charges sont placées aux endroits où le champ "part" et "arrive". Ici on voit qu'il y a trois points alignés où c'est le cas.

(b) Dans les conventions usuelles, le champ "part" d'une charge positive et "arrive" à une charge négative. Il y a donc deux charges positives aux extrémités et une charge négative au centre.

(d) On fait l'hypothèse que le champ électrostatique en A et en B est principalement déterminé par la charge la plus proche P. Pour estimer le champ en B à partir de sa valeur en A, on peut mesurer les distances des points A et B au point P. On trouve $AP \approx 3 \text{ cm}$ et $BP \approx 5 \text{ cm}$. Comme le champ électrostatique est inversement proportionnel à la distance, on a $E_B = E_A(AP/SP)^2 \Rightarrow E_B \approx E_A/2.8$.

(e) Au voisinage du point C, qui se situe assez loin des charges, on remarque qu'il n'y a aucune ligne de champ, ou en tout cas beaucoup moins que pour le point A ou le point B. Cela veut dire que le champ électrostatique est très faible, bien plus faible que pour le point B par exemple. C'est une réponse qualitative, mais un calcul du champ au point C généré par les trois différentes charges doit donner le même résultat (si vous voulez vous entraîner à calculer des champs).

(f) On sait déjà dessiner des lignes de champ pour une charge unique (positive et négative). On se rend compte que les lignes de champ proche des charges ressemblent aux lignes de champ d'une charge unique. Cela veut dire que si on veut calculer le champ électrostatique pour un point proche d'une charge, il suffit de prendre en compte cette unique charge, et de négliger l'action des autres charges plus éloignées.

III. Expérience de Rutherford

Une particule alpha sont des noyaux d'hélium comportant 2 protons et 2 neutrons. Un noyau d'or contient 79 protons. On fait l'hypothèse que les neutrons n'entrent pas en compte dans la rétrodiffusion, et qu'on a uniquement des noyaux d'hélium et d'or (donc pas de nuage électronique). Globalement, on ne considère donc que les protons, la particule alpha et le noyau d'or vont donc se repousser. La particule alpha est composée de 2 protons quand l'atome d'or est composé de 79 protons, chaque proton portant une charge $+q_e$. On a donc $Q_\alpha = 2q_e$ et $Q_{Or} = 79q_e$. D'après le cours, déplacer la particule alpha jusqu'à une distance d du noyau d'or demande le travail $W = Q_\alpha V(d)$, où $V(d)$ est le potentiel électrostatique à une distance d du noyau d'or $V(d) = K \frac{Q_{Or}}{d}$. Pour que la particule rebrousse chemin, il faut que l'énergie potentielle soit aussi forte que l'énergie cinétique $E_0 = 10 \text{ MeV}$. On a donc :

$$W = E_0 \Rightarrow Q_\alpha K \frac{Q_{Or}}{d} = E_0 \Rightarrow d = Q_\alpha K \frac{Q_{Or}}{E_0} \quad (2)$$

Pour l'application numérique, on prend $Q_\alpha = 2q_e = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$, $Q_{Or} = 79q_e = 1.3 \times 10^{-17} \text{ C}$, $E_0 = 10 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ J}$ (il faut multiplier par 10^6 pour convertir en eV puis multiplier par la charge élémentaire q_e pour convertir en J), la constante de Coulomb K est donnée en annexe $K = 9.0 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$. On trouve $d = 2.3 \times 10^{-14} \text{ m} = 23 \text{ fm}$. On remarque que l'ordre de grandeur correspond bien à environ 10^{-15} m qui est approximativement le rayon du noyau d'un atome. Notre calcul semble donc assez correct.

Série C

1. (a) Pour calculer le potentiel électrostatique V_y sur l'axe Oy , il faut considérer les potentiels électrostatiques des charges situées en A et en B pour un point $M(0, y)$ situé sur l'axe Oy : $V_{tot} = V_A + V_B$. En utilisant, pour chacun des deux potentiels la formule $V = K \frac{q}{r}$, où K est la constante de Coulomb, q la charge considérée et r la distance entre le point où on calcule et la charge. On a alors :

$$V_A = K \frac{-2q}{r} ; V_B = K \frac{2q}{r}. \quad (3)$$

Au total, on a donc :

$$V_y = V_A + V_B = -K \frac{2q}{r} + K \frac{2q}{r} = 0 \quad (4)$$

Le potentiel V_y est donc nul.

(b) De même, pour le champ électrostatique, on va ajouter les deux composantes des deux charges : $\vec{E}_y = \vec{E}_A + \vec{E}_B$. On devra utiliser la formule $\vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$. Or ici, ce sont des vecteurs, il faut donc projeter $\vec{AM}$ et $\vec{BM}$ dans la base (x, y) . On voit bien ; grâce à la figure 3(b), que (avec $\vec{x}$, $\vec{y}$ vecteurs unitaires sans dimension) :

$$\vec{AM} = a\vec{x} + y\vec{y} ; \vec{BM} = -a\vec{x} + y\vec{y}. \quad (5)$$

La distance entre A et M est la même que celle entre B et M : c'est la norme des vecteurs :

$$r = \|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\| = \sqrt{a^2 + y^2}. \quad (6)$$

On obtient donc pour les champs :

$$\vec{E}_A = -K \frac{2q}{r^3} \vec{r} ; \vec{E}_B = K \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{E}_y = \vec{E}_A + \vec{E}_B &= -K \frac{2q}{r^3} (a\vec{x} + y\vec{y}) + K \frac{2q}{r^3} (-a\vec{x} + y\vec{y}) \\ &= \left(-K \frac{2q}{r^3} - K \frac{2q}{r^3} \right) \vec{x} + \left(-K \frac{2q}{r^3} y + K \frac{2q}{r^3} y \right) \vec{y} \\ &= -K \frac{4aq}{r^3} \vec{x} \end{aligned} \quad (8)$$

On voit que la composante selon y se simplifie. C'est bien ce que l'on peut voir sur la figure 3(d) où on voit que les lignes de champ sur l'axe Oy sont selon l'axe x , dans la direction négative.

(c) Le point $M(x, 0)$ est cette fois placé sur l'axe Ox . On calcule alors les potentiels :

$$V_A = K \frac{-2q}{x+a} ; V_B = K \frac{2q}{x-a}, \quad (9)$$

d'où

$$V_x = V_A + V_B = -K \frac{2q}{x+a} + K \frac{2q}{x-a}. \quad (10)$$

(d) Les champs électrostatiques valent :

$$\vec{E}_A = -K \frac{2q}{(x+a)^2} \vec{x} ; \vec{E}_B = K \frac{q}{(x-a)^2} \vec{x}, \quad (11)$$

d'où

$$\vec{E}_x = -K \frac{2q}{(x+a)^2} \vec{x} + K \frac{q}{(x-a)^2} \vec{x}. \quad (12)$$

2. (a) On reprend la définition du moment dipolaire et on l'applique à notre cas. On a alors :

$$p = 2q \overrightarrow{AB} = 4aq \vec{x} \quad (13)$$

car $\overrightarrow{AB} = 2a \vec{x}$ (comme on peut le voir sur le schéma de l'énoncé) et la charge du dipôle est ici $2q$.

(b) Si on a $y \gg a$, on peut remplacer $y \pm a$ par y car c'est presque pareil. C'est comme dire que $100 + 0.1 = 100.1 \approx 100$, cela simplifie l'écriture et c'est presque vrai. Par contre, on ne peut rien simplifier s'il y a des multiplications ou des divisions. Par exemple, on voit bien que $100 \times 0.1 = 10 \neq 100$: ce n'est pas parce que 0.1 est très petit devant 100 que cela devient négligeable dans la multiplication (ou la division), bien au contraire ! Pour $y \gg a$, on a donc $r = \sqrt{y^2 + a^2} \approx y$, et donc :

$$\vec{E}_y \approx -K \frac{4aq}{y^2} \vec{x}. \quad (14)$$

On a toujours $V_y = 0$.

(c) De même que précédemment, on a ici $x \gg a$, on peut donc remplacer $x \pm a$ par x . On trouve alors :

$$\vec{E}_x \approx -K \frac{2q}{x^2} \vec{x} + K \frac{q}{x^2} \vec{x} = 0 \quad (15)$$

$$V_x \approx -K \frac{2q}{x} + K \frac{2q}{x} = 0. \quad (16)$$

Le champ et le potentiel sont nuls sur l'axe Ox à grande distance du dipôle, ce qui est en accord avec la carte de champ, car il n'y a pas de ligne de champ sur l'axe Ox .

(d) i. Voir figure 3(d).

ii. Question non traitée

iii. Question non traitée

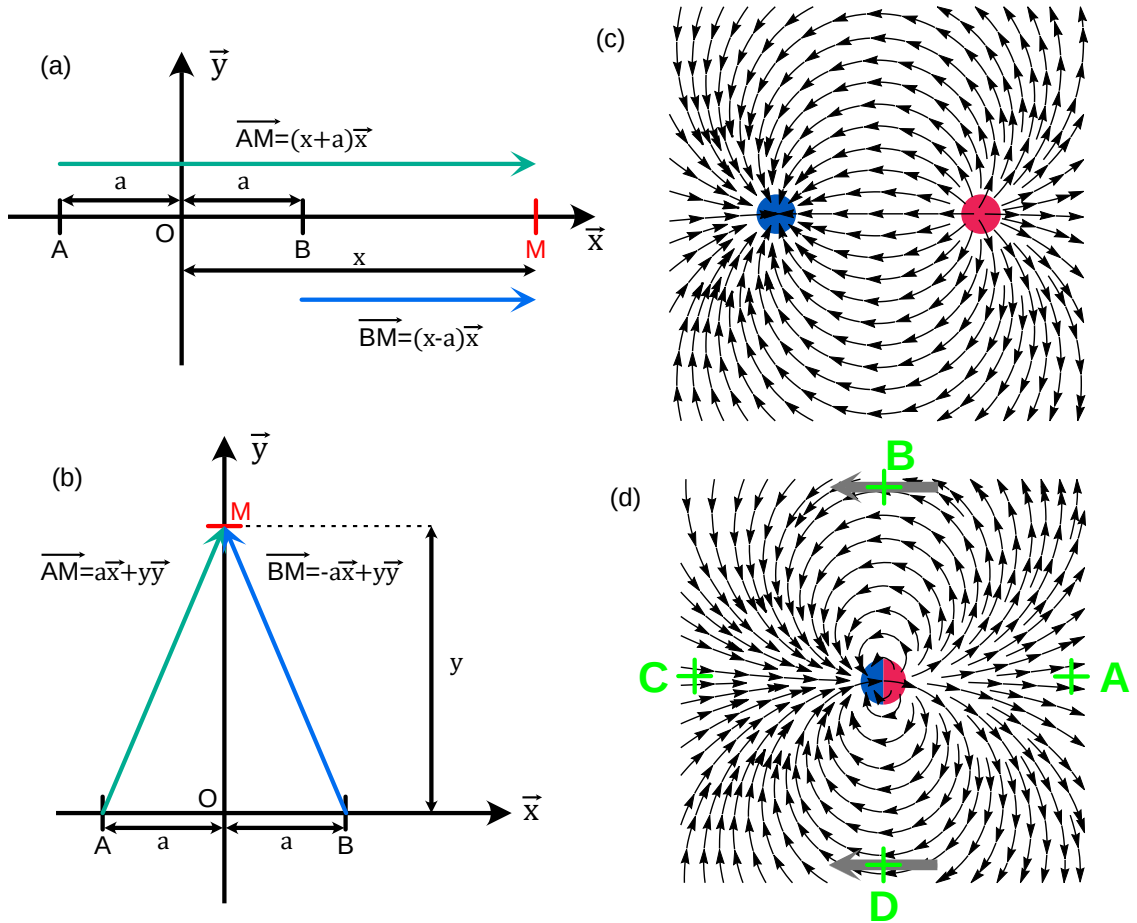


FIGURE 3 – (a) Schéma et vecteurs si le point M est sur l'axe Ox . (b) Schéma et vecteurs si le point M est sur l'axe Oy . (c) Carte de champ électrostatique. Le point rouge correspond à la charge positive et le point bleu à la charge négative. L'approximation dipolaire n'est pas valable ici car on voit bien que les deux pôles (positif et négatif) sont éloignés. (d) Carte de champ électrostatique. Ici, l'approximation dipolaire est valide car les deux pôles sont tellement rapprochés qu'on a l'impression qu'ils sont confondus : ils forment un dipôle. Le champ aux points B et D est selon $-\vec{y}$ tandis que le champ en A et C est asymptotiquement nul (ce qui n'est pas très visible ici).

Série D

1. (a) Pour calculer le potentiel électrostatique en $M(x)$, il faut considérer tous les potentiels électrostatiques de toutes les charges : $V_{tot} = V_A + V_O + V_B$. On doit donc calculer les différents potentiels. En utilisant la formule $V = K \frac{q}{r}$, où K est la constante de Coulomb, q la charge considérée et r la distance entre le point où on calcule et la charge. La distance OM vaut x . On a alors :

$$V_A = K \frac{q}{x+a} ; V_O = K \frac{-2q}{x} ; V_B = K \frac{q}{x-a}. \quad (17)$$

Au total, on a donc :

$$V_{tot} = -K \frac{2q}{x} + K \frac{q}{x+a} + K \frac{q}{x-a}. \quad (18)$$

(b) De même, pour le champ électrostatique, on va ajouter les trois composantes des trois charges : $\vec{E}_{\mathcal{M}_2} = \vec{E}_A + \vec{E}_O + \vec{E}_B$. En utilisant la formule $\vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$, on obtient (avec $\vec{x}$ vecteur unitaire sans dimension) :

$$\vec{E}_A = K \frac{q}{(x+a)^2} \vec{x} ; \vec{E}_O = -K \frac{2q}{x^2} \vec{x} ; \vec{E}_B = K \frac{q}{(x-a)^2} \vec{x}. \quad (19)$$

Au total, on a donc :

$$\vec{E}_{\mathcal{M}_2} = -K \frac{2q}{x^2} \vec{x} + K \frac{q}{(x+a)^2} \vec{x} + K \frac{q}{(x-a)^2} \vec{x}. \quad (20)$$

2. (a) On peut utiliser la formule (21) en prenant $x = l \gg a$ car on se situe en $C(l, 0)$. Donc, quand on a $x \pm a$, on peut remplacer par l . On obtient donc :

$$\vec{E}_{\mathcal{M}_2} = -K \frac{2q}{l^2} \vec{x} + K \frac{q}{l^2} \vec{x} + K \frac{q}{l^2} \vec{x} = \vec{0}. \quad (21)$$

(b) i. $\vec{F}_2 = q_0 \vec{E}_2 = q_0 \left(-K \frac{2q}{x^2} \vec{x} + K \frac{q}{(x+a)^2} \vec{x} + K \frac{q}{(x-a)^2} \vec{x} \right).$

ii. $\vec{F}_1 = q_0 \vec{E}_1 = q_0 \left(-K \frac{2q}{(x+a)^2} \vec{x} + K \frac{2q}{(x-a)^2} \vec{x} \right).$

iii. On utilise les valeurs données dans la série C 2. (d) ii : $a = 1 \text{ \AA}$ and $l = 1 \mu\text{m}$. On obtient alors (en utilisant les normes des vecteurs) : $F_2/F_1 = E_2/E_1$ car q_0 s'annule, puis $F_2/F_1 \approx 7.5 \cdot 10^{-5}$. F_2 est donc très petite par rapport à F_1 . C'est l'effet d'écran.