Introdução às Singularidades via Teoria das Catástrofes

Curso de Verão 2025 - Aula III

Inácio Rabelo

https://inaciorabelo.owlstown.net

20/01/2024

Conteúdo

Recapitulando

Estruturas Elásticas

Termodinâmica

Sistemas Estelares

Observações Históricas

Deformações I

Definição

Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe suave tal que 0 é um ponto crítico.

1. *Uma deformação a k-parâmetros de f é um germe*

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto F(x, u)$$

   tal que $F(x, 0) = f(x)$.

2. *Duas deformações F e G a k-parâmetros são equivalentes se existe um germe de difeomorfismo*

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto (\phi_u(x), u)$$

   tal que $\Phi(x, 0) = (x, 0)$ e $F = G \circ \Phi$.

3. *Uma deformação a k-parâmetros F é chamada de trivial se é equivalente à deformação constante $G(x, u) = f(x)$.*

4. *O germe f é chamado de (estruturalmente) estável quando todas as suas deformações são triviais.*

Deformações II

Definição

1. *Seja* $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *um germe de função potencial nas variáveis* $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. *Dizemos que o espaço* $\mathbb{R}^n$ *é o espaço de estados e que* $\mathbb{R}^k$ *o espaço de controle.*

2. *O conjunto catástrofe, também chamado de estados de equilíbrio, é*

$$C_V = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) : \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n \right\}.$$

3. *O conjunto de bifurcação, também chamado de estados de equilíbrio instáveis, é*

$$B_V = \left\{ u \in (\mathbb{R}^k, 0) : \exists \, (x, u) \in C_F \text{ tal que } \operatorname{rank}_{(x,u)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) < n \right\}.$$

Deformações III

Definição

1. *Seja* $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação de um germe* f. *Seja* $h : (\mathbb{R}^a, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ *um germe de aplicação. O pullback de* F *por* h *é a deformação*

$$h^*F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, v) \longmapsto F(x, h(v))$$

   Essa deformação é também chamada de mudança de parâmetros da deformação.

2. *Uma deformação* F *a* k*-parâmetros é chamada versal se para qualquer deformação* G *a* a*-parâmetros existe uma mudança* h *de parâmetros tal que* h^*F *e* G *são equivalentes.*

3. *Uma deformação versal* F *a* k*-parâmetros é chamada miniversal se não existe uma deformação versal a um número de parâmetros menor que* k.

4. *Sejam* F *e* G *duas deformações a* k*-parâmetros. Elas são chamadas isomorfas se existe uma mudança de parâmetros* $h : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, *que é também um difeomorfismo, tal que* G *é equivalente a* h^*F.

Estabilidade Estrutural

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações de resultados.

Estabilidade Estrutural

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações de resultados.

Formulação da Análise

As funções potenciais V serão descritas por meio de variáveis de estados x e variáveis de controle u e, portanto, terão como domínio um subespaço em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. A estabilidade estrutural se traduz para a hipótese de que todos os possíveis estados do sistema, incluindo perturbações suficientemente controladas, são descritos qualitativamente pelos controles u através do potencial V.

Estabilidade Estrutural

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações de resultados.

Formulação da Análise

As funções potenciais V serão descritas por meio de variáveis de estados x e variáveis de controle u e, portanto, terão como domínio um subespaço em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. A estabilidade estrutural se traduz para a hipótese de que todos os possíveis estados do sistema, incluindo perturbações suficientemente controladas, são descritos qualitativamente pelos controles u através do potencial V.

Estabilidade estrutural é equivalente a dizer que a deformação de potenciais é versal, ou seja, é equivalente a qualquer outra perturbação suficientemente pequena da singularidade.

Teorema de Thom

Teorema (Catástrofes de Thom)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma deformação versal tal que* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Então,* V *é* $\mathcal{P}-\mathcal{R}^+$*-equivalente a uma, e somente uma, das deformações abaixo:*

Tipo	***Singularidade***	***Deformação Versal***	***Nome***
A_2	x^3	$x^3 + u_1x$	*Ponto*
A_3	x^4	$\pm x^4 + u_2x^2 + u_1x$	*Cúspide*
A_4	x^5	$x^5 + u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Rabo de Andorinha*
A_5	x^6	$\pm x^6 + u_4x^4u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Borboleta*
D_4^-	$x^3 + y^3$	$x^3 - xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2y + u_1x$	*Hiperbólica Umbílica*
D_4^+	$x^3 + 3xy^2$	$x^3 + y^3 + u_3xy + u_2y + u_2x$	*Elíptica Umbílica*
D_5	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + u_4y^2 + u_3x^2 + u_2y + u_1x$	*Parabólica Umbílica*

Dobra

- Deformação versal $V(x,u) = x^3 + ux$ da singularidade x^3.
- Os estados críticos degenerados das singularidades geradas por V são determinados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} & = 3x^2 + u = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x^2} & = 6x = 0 \end{cases}$$

Dobra

- Deformação versal $V(x,u) = x^3 + ux$ da singularidade x^3.
- Os estados críticos degenerados das singularidades geradas por V são determinados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} & = 3x^2 + u = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x^2} & = 6x = 0 \end{cases}$$

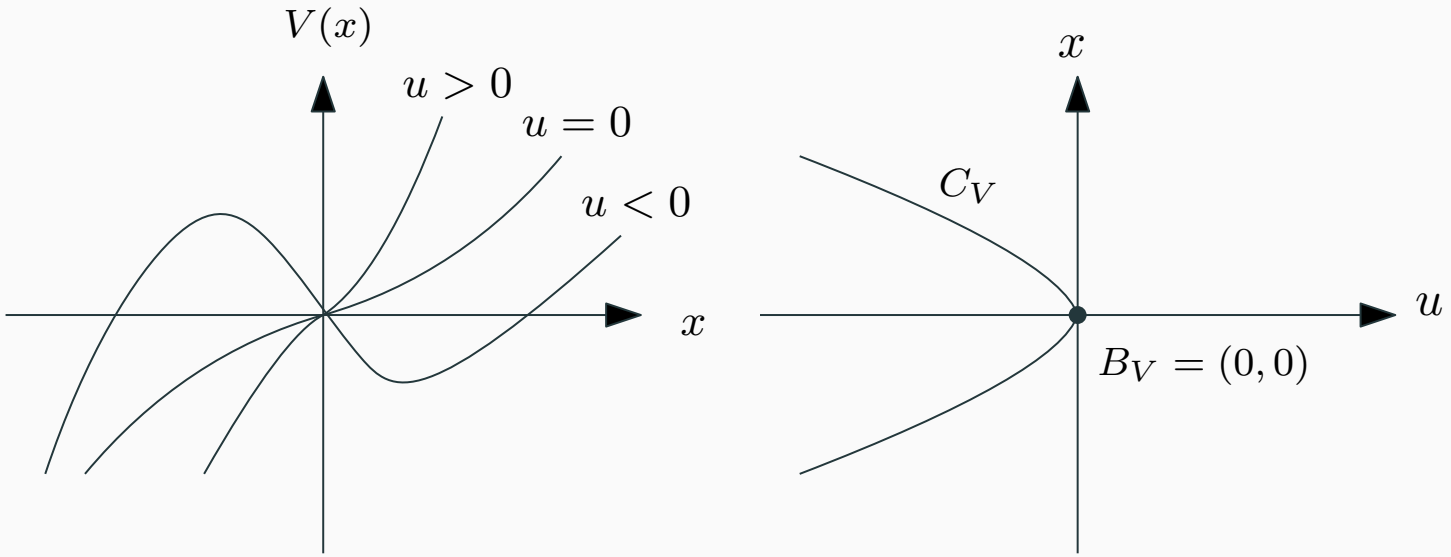


Figura 1: Singularidades geradas e curva de equilíbrio

Cúspide

- Deformação versal $V(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$ da singularidade x^4.
- A superfície de equilíbrio, ou seja, a cúspide é determinada por

$$B_V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 8u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

Cúspide

- Deformação versal $V(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$ da singularidade x^4.
- A superfície de equilíbrio, ou seja, a cúspide é determinada por

$$B_V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 8u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

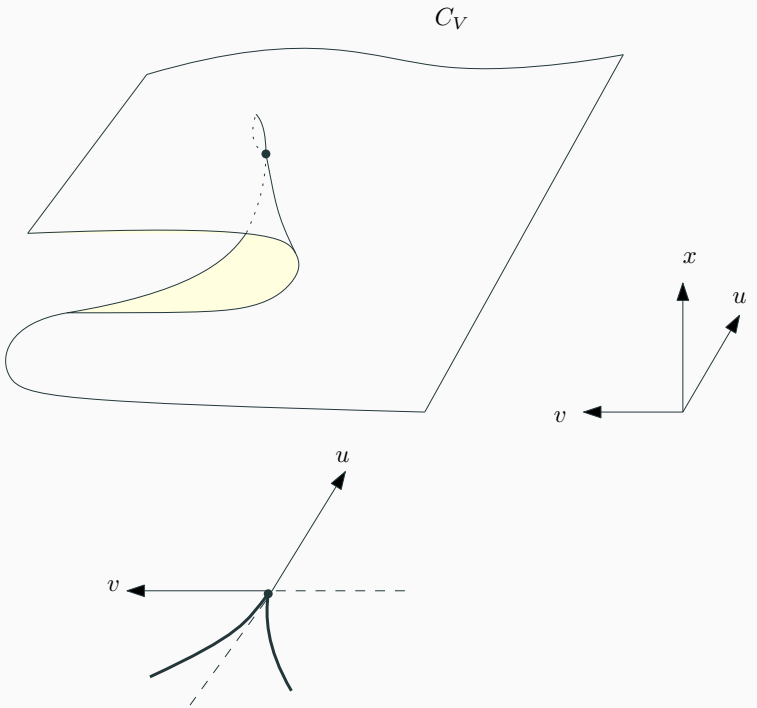


Figura 2: Catástrofe cúspide e seu conjunto de bifurcação

Conteúdo

Recapitulando

Estruturas Elásticas

Termodinâmica

Sistemas Estelares

Observações Históricas

Estruturas

- Estruturas de engenharia possuem uma natureza elástica.
- Sujeitas às intempéries e desgastes.
- Desgastes modelados são modelados pela ação de forças externas.
- Rompimento é uma discontinuidade.

Estruturas

- Estruturas de engenharia possuem uma natureza elástica.
- Sujeitas às intempéries e desgastes.
- Desgastes modelados são modelados pela ação de forças externas.
- Rompimento é uma discontinuidade.



Figura 3: Exemplos brasileiro e soviético da arquitetura brutalista

Arco de Euler I

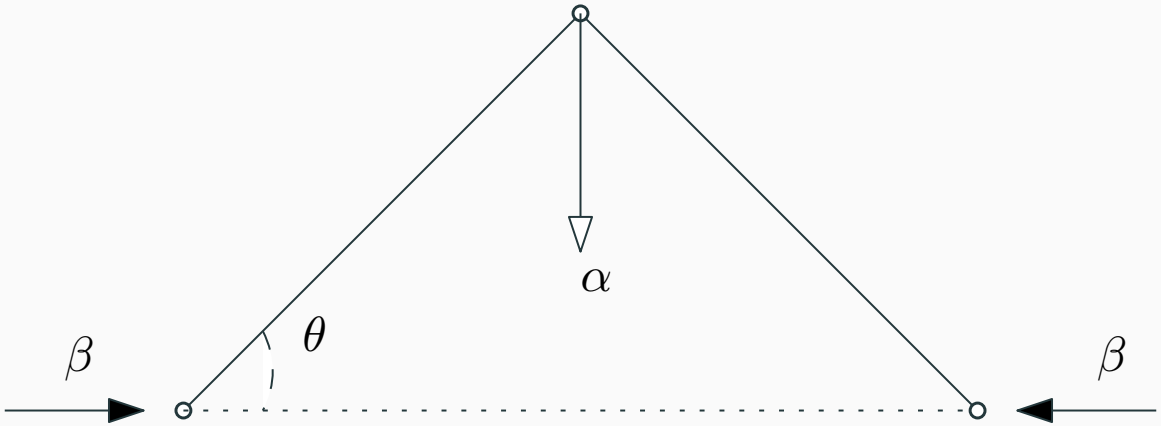


Figura 4: Arco de Euler

Arco de Euler I

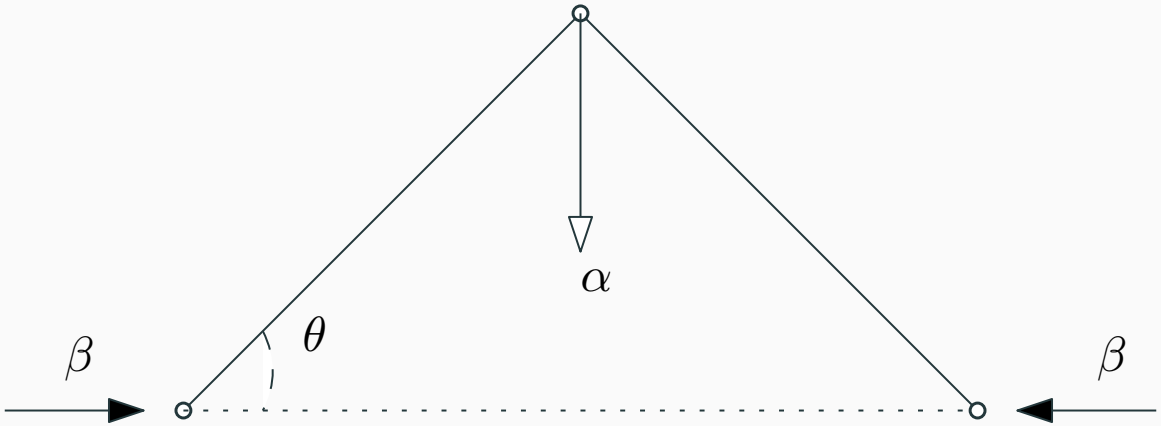


Figura 4: Arco de Euler

- Estado descrito pelo ângulo θ.
- Variáveis de deformação ou controle são α, β.
- A relação das intensidades pode levar a uma ruptura.
- Assumindo a estabilidade estrutural, temos uma catástrofe do tipo cúspide.

Arco de Euler II

- Energia potencial: $2\mu\theta$, μ coeficiente do material.
- Energia do corpo α: $\sin\theta$.
- β equilibra a força α.
- A energia total é

$$V(\theta) = 2\mu\theta^2 + \alpha\sin\theta - 2\beta\cos\theta.$$

- Assumindo estabilidade estrutural, temos uma catástrofe do tipo cúspide.

Modelo de Augusti I

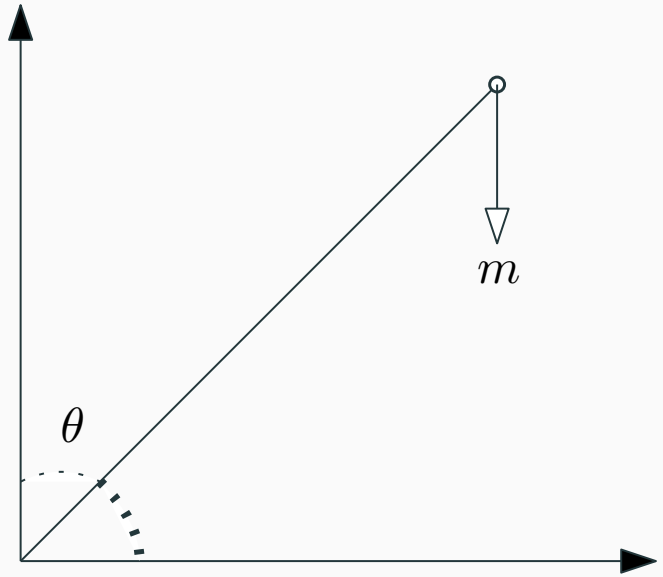


Figura 5: Arco de Euler

Modelo de Augusti I

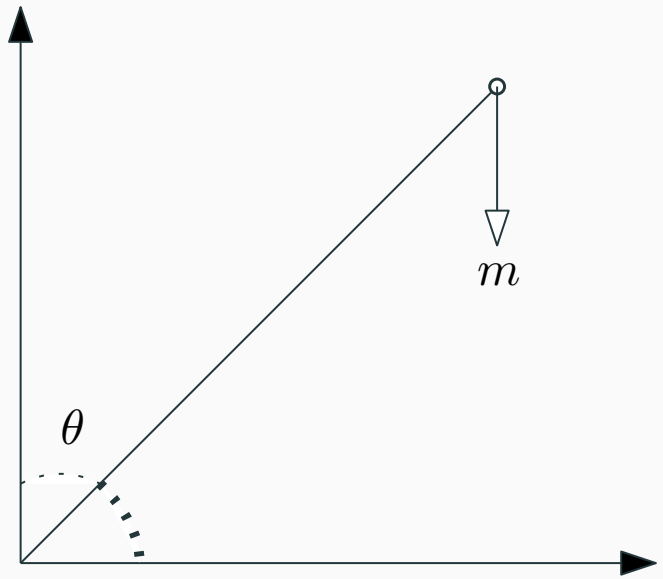


Figura 5: Arco de Euler

- Nesse caso, há somente uma estrutura elástica.
- Variável de estado é θ.
- A deformação no sistema é gerada por m.
- Veremos que o potencial depende de θ, m e μ.

Modelo de Augusti II

- Energia elástica: $\frac{1}{2}\mu\theta^2$.
- Energia potencial de m: $mg\cos\theta$.
- Energia total é $V(\theta) = \frac{1}{2}\mu\theta^2 + mg\cos\theta$.

Modelo de Augusti II

- Energia elástica: $\frac{1}{2}\mu\theta^2$.
- Energia potencial de m: $mg\cos\theta$.
- Energia total é $V(\theta) = \frac{1}{2}\mu\theta^2 + mg\cos\theta$.
- Se μ é variável, catástrofe cúspide.
- Do contrário, temos a dobra.
- Isso permite vê-la como uma seção transversal da cúspide com controles (m, μ).

Conteúdo

Recapitulando

Estruturas Elásticas

Termodinâmica

Sistemas Estelares

Observações Históricas

Lei dos Gases

- Considere um sistema composto por um gás em um cilindro.
- No equipamento é possível alterar a pressão.
- A superfície admite fluxo de calor, mas não sofre perturbações externas.
- A lei que relaciona essas grandezas é a equação de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = kT.$$

Energia Livre

- A energia livre associada é $F = E - TS$.
- E: energia interna.
- S: entropia.

Energia Livre

- A energia livre associada é $F = E - TS$.
- E: energia interna.
- S: entropia.

Princípio de Gibbs
Existe uma função $G = G(V, P, T)$ tal que se $G_{P,T} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo dentre todas as variáveis de controle P e T para um determinado ponto (P_0, T_0), então o sistema está em um estado de equilíbrio em (P_0, T_0).

Energia Livre

- A energia livre associada é $F = E - TS$.
- E: energia interna.
- S: entropia.

Princípio de Gibbs
Existe uma função $G = G(V, P, T)$ tal que se $G_{P,T} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo dentre todas as variáveis de controle P e T para um determinado ponto (P_0, T_0), então o sistema está em um estado de equilíbrio em (P_0, T_0).

Observação
Convencionamos que V é vista como deformação com parâmetros P e T.

Considerações

- Catástrofe: situação discontínua de aumento de volume.
- Representa catástrofe do tipo cúspide?
- Para um ponto de discontinuidade P_τ, uma mudança em V não altera significativamente a pressão.
- Isso implica que o gráfico abaixo é mais próximo do real.

Considerações

- Catástrofe: situação discontínua de aumento de volume.
- Representa catástrofe do tipo cúspide?
- Para um ponto de discontinuidade P_τ, uma mudança em V não altera significativamente a pressão.
- Isso implica que o gráfico abaixo é mais próximo do real.

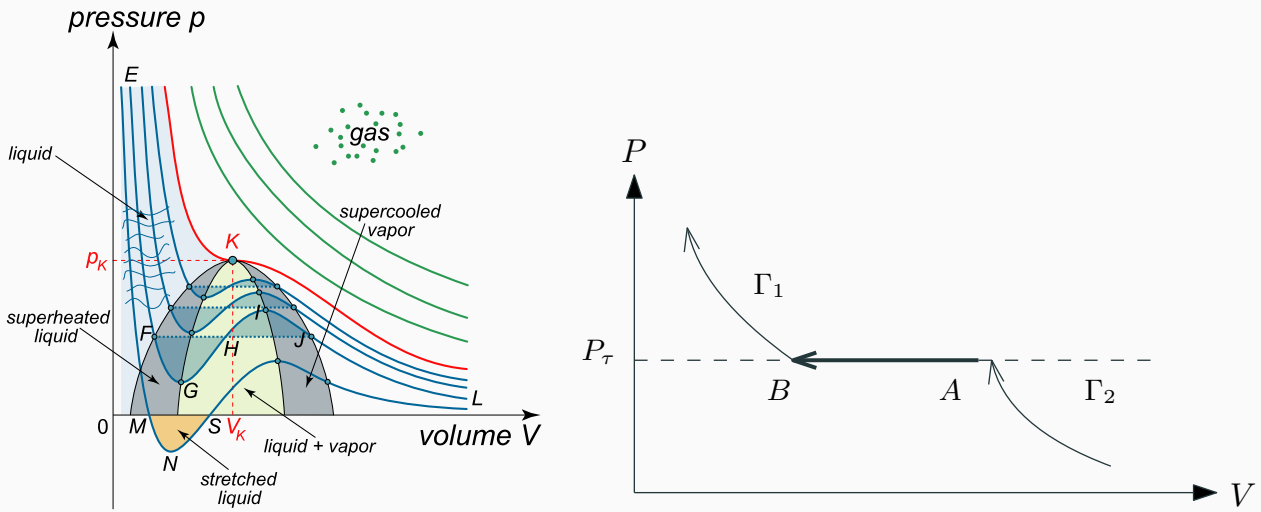


Figura 6: Pressão e volume para diferentes temperaturas e transição de fase

Falha da Histerese

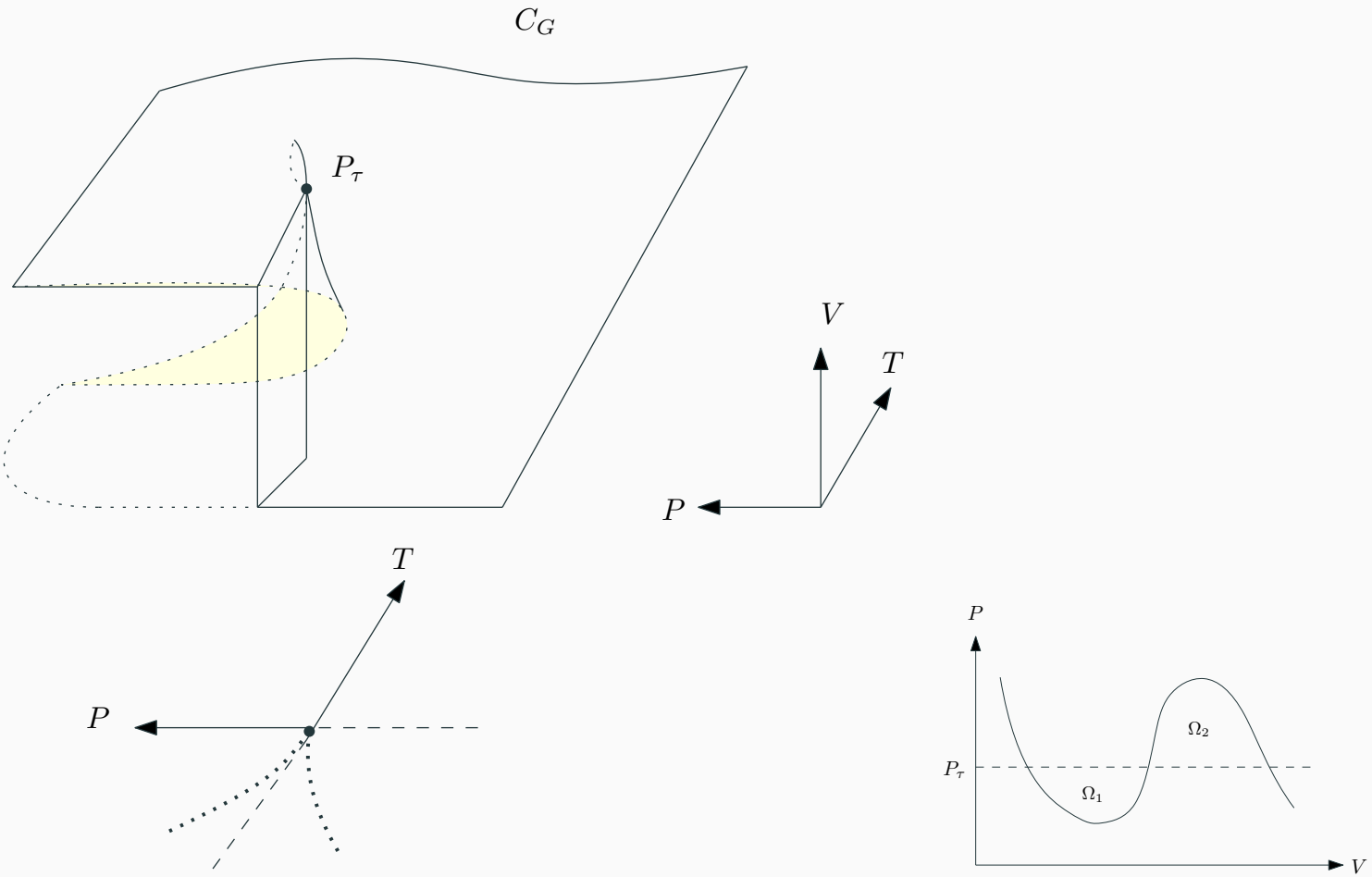


Figura 7: Geometria real da cúspide e estado intermediário líquido-vapor

Conteúdo

Recapitulando

Estruturas Elásticas

Termodinâmica

Sistemas Estelares

Observações Históricas

Equilíbrio Hidrostático I

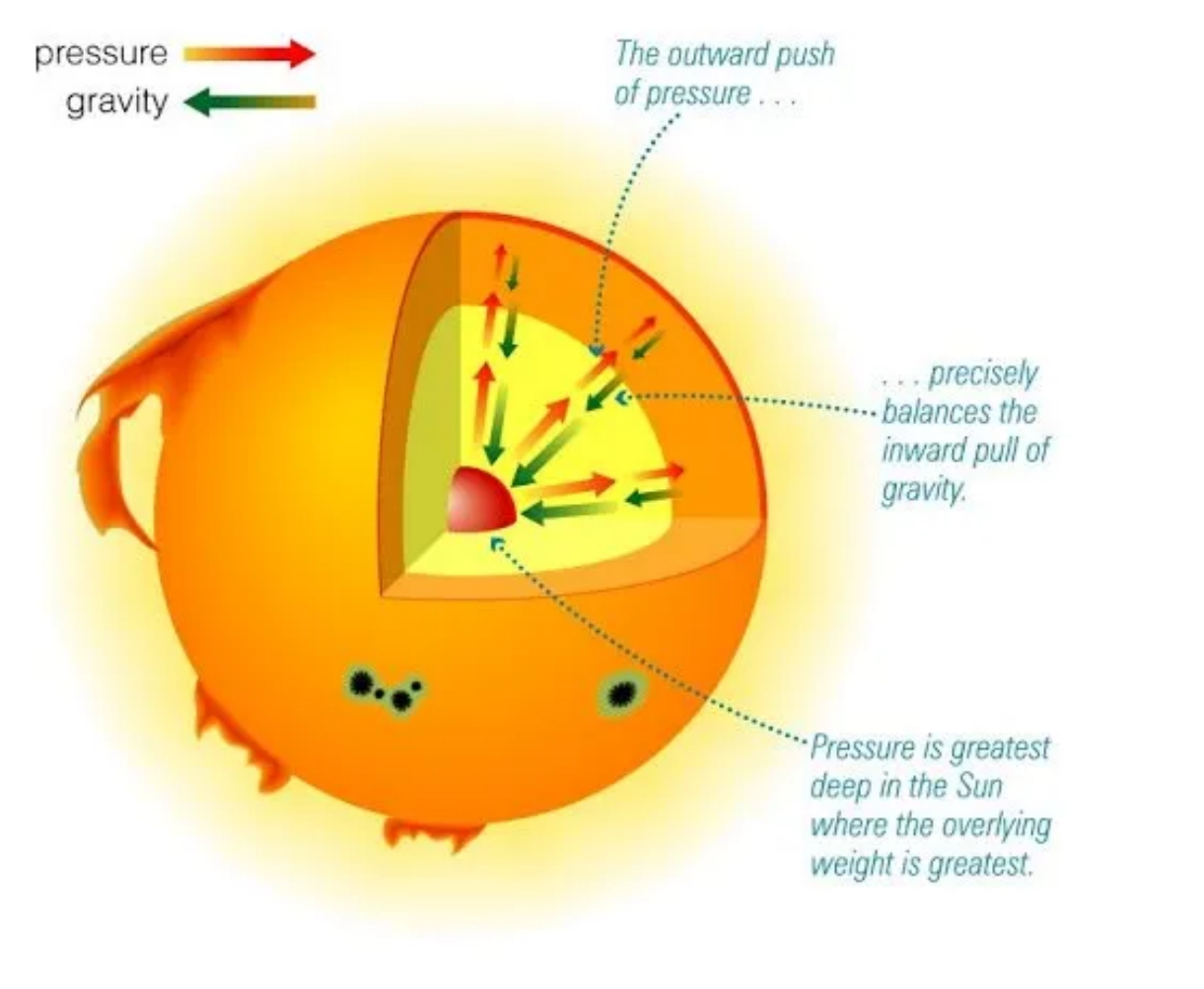


Figura 8: Equilíbrio Hidrostático em um Estrela

Equilíbrio Hidrostático II

- Região esférica com densidade $\rho(r)$, onde r é o raio.
- Considere uma partícula com massa dm em uma área A e volume $dV = Adr$.
- Força gravitacion dF_g apontando para o núcleo.
- Força dF_p apontando para fora, relacionado a pressão dos gases.

Forças

- A força é a resultante de F_g e F_p.
- Por um lado,

$$dF_g = \frac{G\rho(r)AM(r)dr}{r^2}.$$

Forças

- A força é a resultante de F_g e F_p.
- Por um lado,

$$dF_g = \frac{G\rho(r)AM(r)dr}{r^2}.$$

- Por outro, $dm = \rho(r)Adr$ sF_P em uma casca é

$$F_P = \Delta(P)A = P(r + dr)A - P(r)A.$$

- Equilíbrio hidrostático ocorre quando possuem o mesmo módulo:

$$dF_G = dF_P \implies \frac{dP}{dr}drA = \frac{G\rho(r)AM(r)dr}{r^2} \implies \frac{dP}{dr} = \frac{G\rho(r)M(r)}{r^2}.$$

Catástrofes na Configuração Geral

- Estrelas são corpos celestes formados por gases.
- Quando seu combustível (hidrogênio) acaba, significativamente sofre somente a ação de F_g.
- Isso resulta em aumento da densidade central.
- Resulta na transformação da estrela em anã branca ou buraco negro.

Catástrofes na Configuração Geral

- Estrelas são corpos celestes formados por gases.
- Quando seu combustível (hidrogênio) acaba, significativamente sofre somente a ação de F_g.
- Isso resulta em aumento da densidade central.
- Resulta na transformação da estrela em anã branca ou buraco negro.

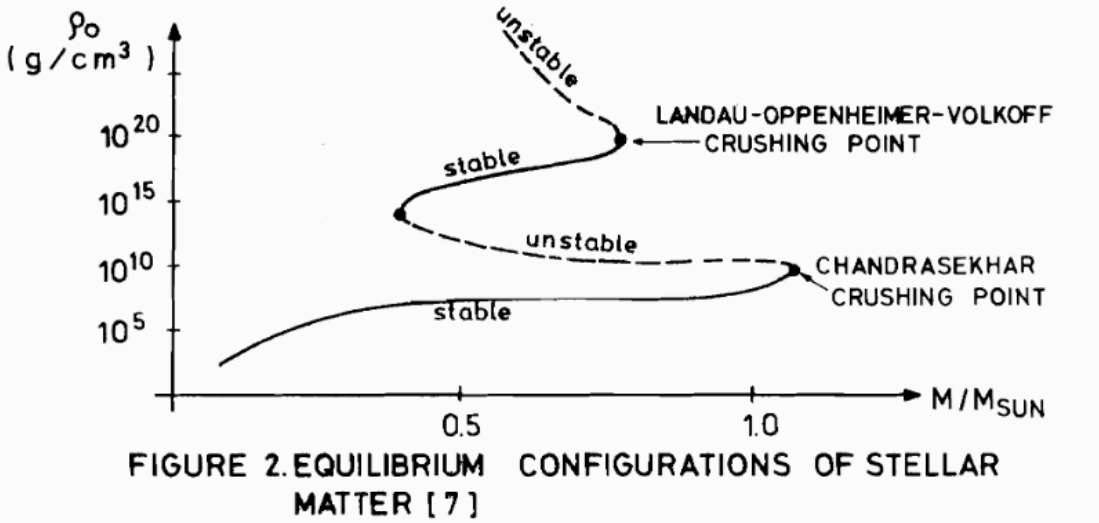


Figura 9: Estados de equilíbrio de uma estrela com parâmetros massa e densidade

Primeira Conclusão

- Temos dois parâmetros de controle.
- Cada um dos limites representa discontinuidade.
- Admitindo estabilidade estrutural, obteríamos duas cúspides sobrepostas.

Primeira Conclusão

- Temos dois parâmetros de controle.
- Cada um dos limites representa discontinuidade.
- Admitindo estabilidade estrutural, obteríamos duas cúspides sobrepostas.

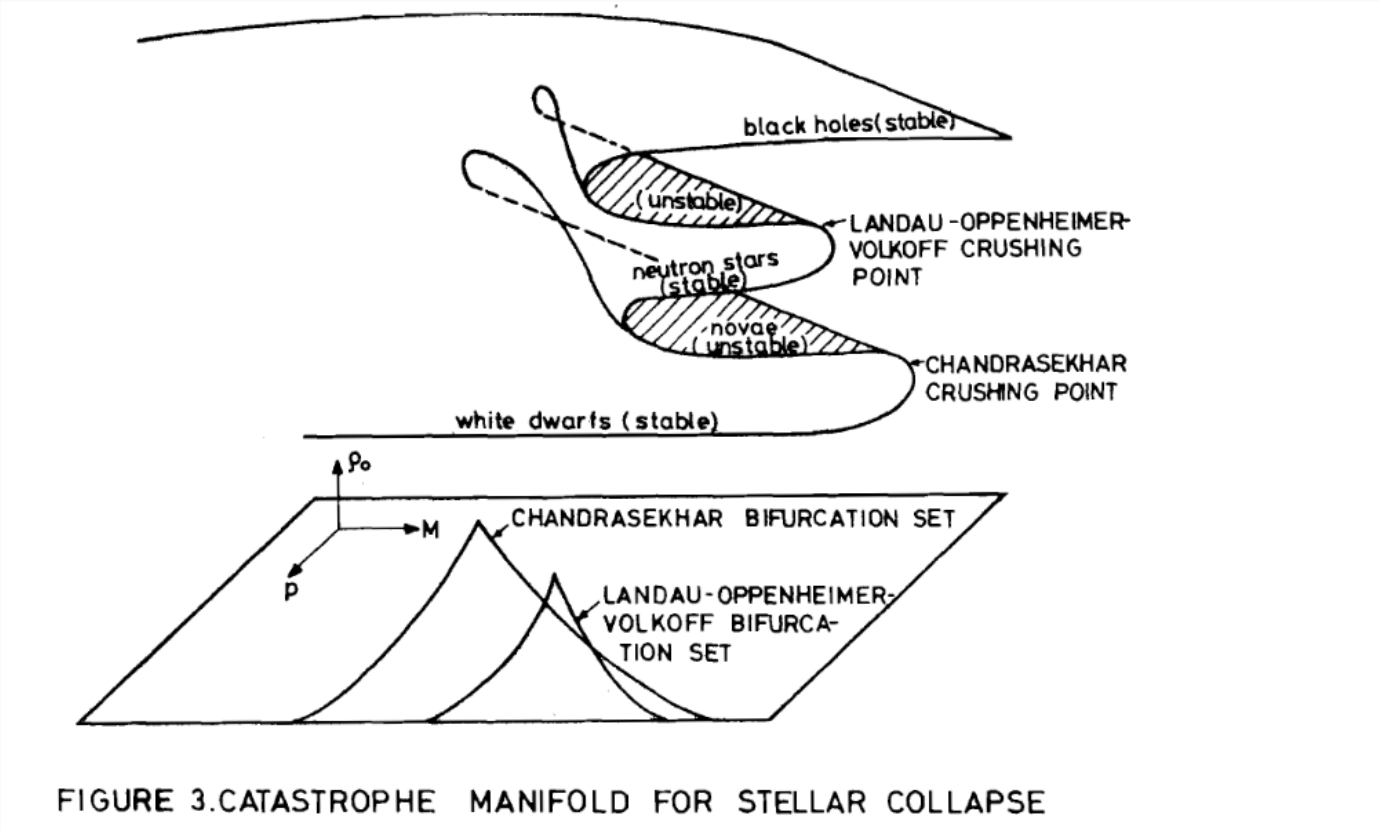


Figura 10: Sobreposição de Catástrofes Estelares

Problemas

- Os estados intermediários poderiam conter outras singularidades.
- Determinação do potencial é um problema complexo.
- Envolve simplificações variadas sobre o fenômenos.
- Há formulação que concluem que a catástrofe é, na verdade, do tipo dobra.

Conteúdo

Recapitulando

Estruturas Elásticas

Termodinâmica

Sistemas Estelares

Observações Históricas

Duas situações

Either starting from known scientific laws (from Mechanics or Physics) you insert the catastrophe theory formalism (eventually modified) as a result of these laws: this is the physical way. Or, starting from a poorly understood experimental morphology, one postulates ***a priori*** *the validity of the catastrophe formalism, and one tries to reconstruct the underlying dynamics which generates this morphology: this is the metaphysical way. Needless to say, the second way seems to me more promising than the first, if less secure.*

Thom, The two-fold way of catastrophe theory, 1976.

Modelo de Guerra I

- M o nível de militarização/agressividade de um país.
- Quantificadores: investimentos e ações militares, por exemplo.

Modelo de Guerra I

- M o nível de militarização/agressividade de um país.
- Quantificadores: investimentos e ações militares, por exemplo.
- A o nível de ameaça.
- Quantificadores: avaliação das relações comerciais e diplomáticas.
- C o custo de guerra.

Modelo de Guerra I

- M o nível de militarização/agressividade de um país.
- Quantificadores: investimentos e ações militares, por exemplo.
- A o nível de ameaça.
- Quantificadores: avaliação das relações comerciais e diplomáticas.
- C o custo de guerra.
- Suponha que a configuração é a resultante da opinião majoritária da sociedade.
- Isso seria otimizar o potencial.
- Uma discontinuidade refere-se a um comportamento agressivo repentino e não somente um estado.

Estados sobre a cúspide

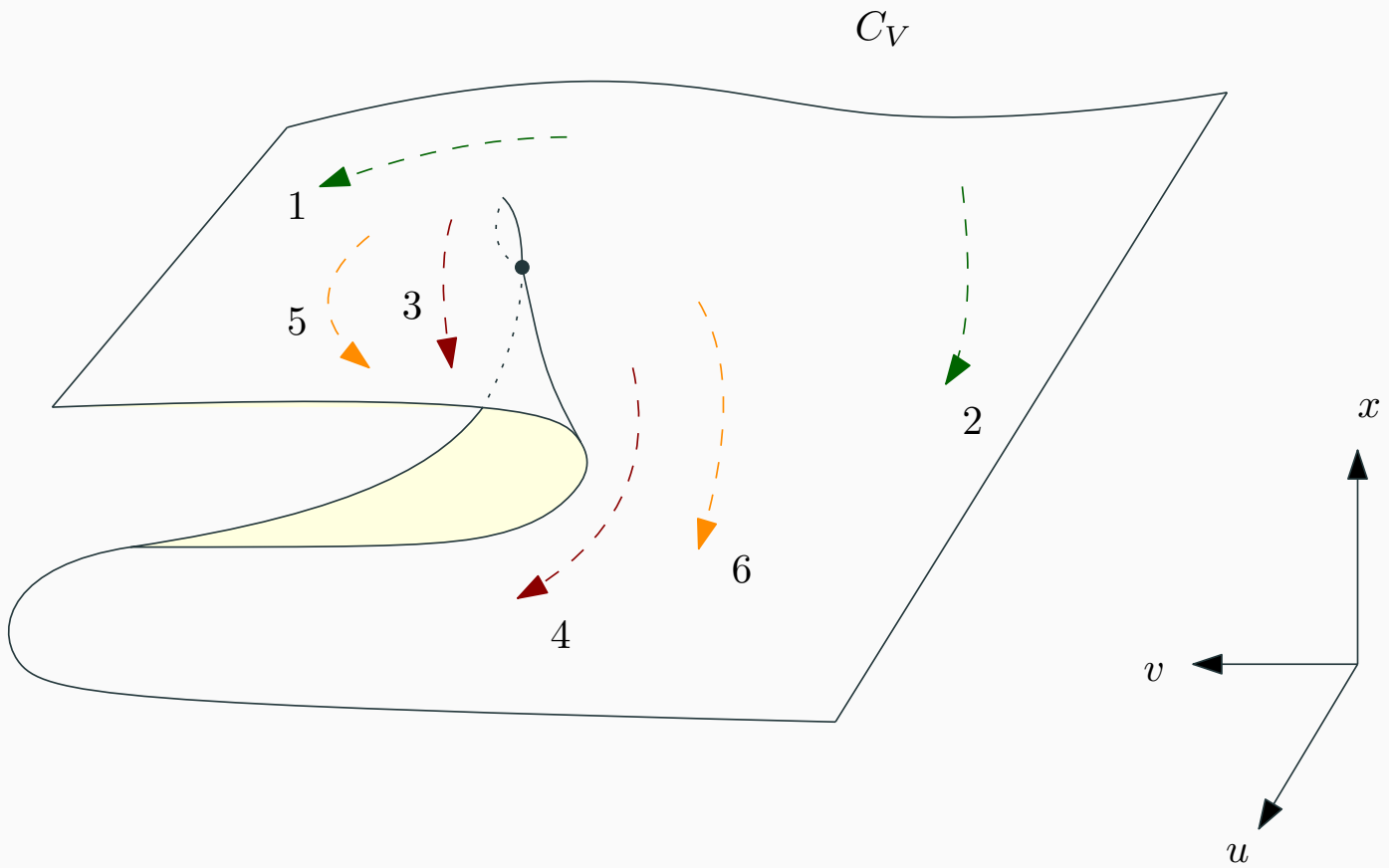


Figura 11: Caminhos sobre a superfície de equilíbrio

Modelo de Guerra II

1. Caminhos 1 e 2: Há um aumento dos custos e uma diminuição da ameaça para o caminho 1 e, consequentemente, nenhuma mudança esperada. Isso poderia corresponder a uma situação em que há um conflito em curso mas não há uma escalada. No caminho 2, há uma diminuição da ameaça e os custos permanecem estáveis. Essa seria uma situação de paz.

2. Caminhos 3 e 4: Representam estados de aumento de custos e das ameaças, mas à partir de estratégias adotadas de maneira distintas, visto que são caminhos que se formam em locais diferentes. Em um dado momento, a situação tende a um aumento significativo da militarização, como uma declaração aberta de guerra, ou então uma diminuição, que poderia representar uma declaração inesperada de cessar-fogo. Um caso representativo seria a crise dos mísseis, em que os EUA adotaram desde o início uma postura agressiva que resultou na retirada (caminho 3), ou uma escalada da URSS que estava com uma agressividade baixa desde o início mas poderia decidir pela guerra.

3. Caminhos 5 e 6: O caminho 5 representa um caso em que a ameaça aumenta e o custo se encontra baixo, isso resulta no aumento da militarização, mas após um período a guerra se torna inviável e uma postura mais branda toma lugar. Por exemplo, a invasão dos EUA ao Vietnã. O caminho 6 representa um alto custo e uma ameaça crescentemente baixa. Posteriormente, a ameaça cresce de uma maneira que a declaração, inesperada, é dada. Como exemplo, as invasões alemãs da Bélgica e da Polônia em 1914 e 1939, respectivamente.

Críticas

Using the war model of Isnard and Zeeman as a paradigm, it is shown that many catastrophe theory models in social science possess serious weaknesses. The catastrophes supposedly account for real-life behavior, but actually are only a restatement of the fact that discontinuities exist. No deep mathematical results are actually used. The hypotheses are ambiguous or far-fetched. In addition, Thom'stheorem, the mathematical centerpiece of applied catastrophe theory, is inherently uninformative for applications. The theory is helpful on neither the qualitative nor the quantitative level. Finally, better and simpler mathematical tools exist.

Zahler-Sussman, Nature, 1977.

Críticas

Using the war model of Isnard and Zeeman as a paradigm, it is shown that many catastrophe theory models in social science possess serious weaknesses. The catastrophes supposedly account for real-life behavior, but actually are only a restatement of the fact that discontinuities exist. No deep mathematical results are actually used. The hypotheses are ambiguous or far-fetched. In addition, Thom'stheorem, the mathematical centerpiece of applied catastrophe theory, is inherently uninformative for applications. The theory is helpful on neither the qualitative nor the quantitative level. Finally, better and simpler mathematical tools exist.

Zahler-Sussman, Nature, 1977.

- Hipótese de potenciais e estabilidade estrutural fortes e não verificáveis.
- Conclusões contidas nas próprias hipóteses.
- Imprecisão na formulação matemática de grandezas.
- Conclusões não gerais e eventualmente demasiadamente complicadas.

Outros Pontos

There seems to be a time scale in all natural processes beyond which structural stability and calculability become incompatible. In planetary mechanics this scale is of such an extent that the incompatibility is not evident, whereas in quantum mechanics it is so short that the incompatibility is immediately felt, and today the physicist sacrifices structural stability for computability. I hope that he will not have cause to regret this choice.

René Thom, Structural Stability and Morphogenesis, 1972.

Outros Pontos

There seems to be a time scale in all natural processes beyond which structural stability and calculability become incompatible. In planetary mechanics this scale is of such an extent that the incompatibility is not evident, whereas in quantum mechanics it is so short that the incompatibility is immediately felt, and today the physicist sacrifices structural stability for computability. I hope that he will not have cause to regret this choice.

René Thom, Structural Stability and Morphogenesis, 1972.





Figura 12: Ideias universalistas que remontam aos gregos