Introdução às Singularidades via Teoria das Catástrofes

Curso de Verão 2025 - Aula I

Inácio Rabelo

rabeloinacio@usp.br

14/01/2024

Conteúdo

Sobre o Curso

Introdução

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Objetivos e Ferramentas

Exercícios

Ementa

- **Pré-requisitos:** Cálculo de várias variáveis e noções básicas de topologia geral.
- **Aula I**: Motivação e resultados principais; Revisão de Càlculo; Potenciais; Germes e o grupo $\mathcal{R}$.
- **Aula II**: Lema de Decomposição; Deformações e o Teorema de Classificação.
- **Aula III**: Aplicações: Cáusticas, Termodinâmica e Sistemas Estelares; Observações Históricas.
- **Aula IV**: Determinação finita: Discussão da classificação de germes simples de funções (Teorema de Arnold) e de germes do plano (Teorema de Whitney).

Bibliografia


Gibson, C. G.

Singular points of smooth mappings

Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London.


Zeeman, E. C.

Catastrophe theory

Scientific American.


Poston, Tim and Stewart, Ian

Catastrophe theory and its applications

Dover Publications, Inc., Mineola, NY.


Saunders, PT

An Introduction to Catastrophe Theory

Cambridge University Press.


Site pessoal

`https://inaciorabelo.owlstown.net`

Conteúdo

Sobre o Curso

Introdução

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Objetivos e Ferramentas

Exercícios

O que é uma Singularidade?

Dicionário

1. Qualidade ou propriedade do que é singular.

2. Característica distintiva fundamental; particularidade, peculiaridade.

O que é uma Singularidade?

Dicionário

1. Qualidade ou propriedade do que é singular.

2. Característica distintiva fundamental; particularidade, peculiaridade.

3. Qualidade do que é fora do comum, surpreendente, espantoso.

4. Região do espaço-tempo na qual as atuais leis da física e as equações matemáticas não operam e a curvatura do espaço se torna infinita.

Singularidades são interessantes!

Singularities are all over the place. Without singularities, you cannot talk about shapes. When you write a signature, if there is no crossing, no sharp point, it's just a squiggle. It doesn't make a signature. Many phenomena are interesting, or sometimes disastrous, because they have singularities. A singularity might be a crossing or something suddenly changing direction. There are many things like that in the world, and that's why the world is interesting. Otherwise, it would be completely flat. If everything were smooth, then there would be no novels or movies. The world is interesting because of the singularities.

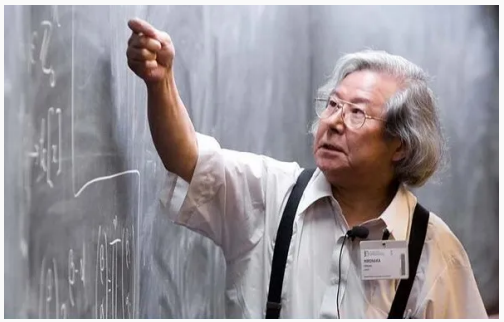


Figura 1: Heisuke Hironaka, ganhador da Medalha Fields em 1970

Exemplo 0: Buracos negros

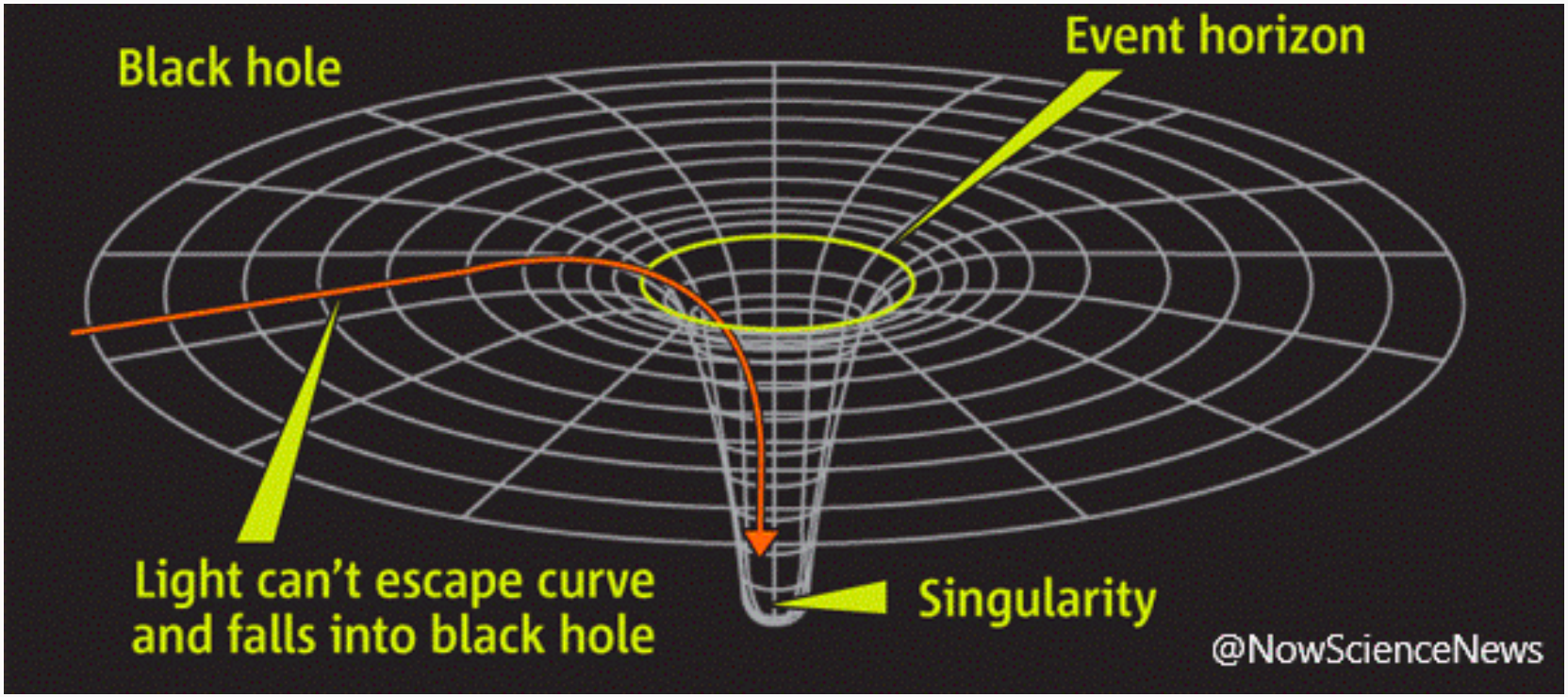


Figura 2: Um buraco negro é uma singularidade da curvatura do espaço-tempo

Exemplo 0: Buracos negros

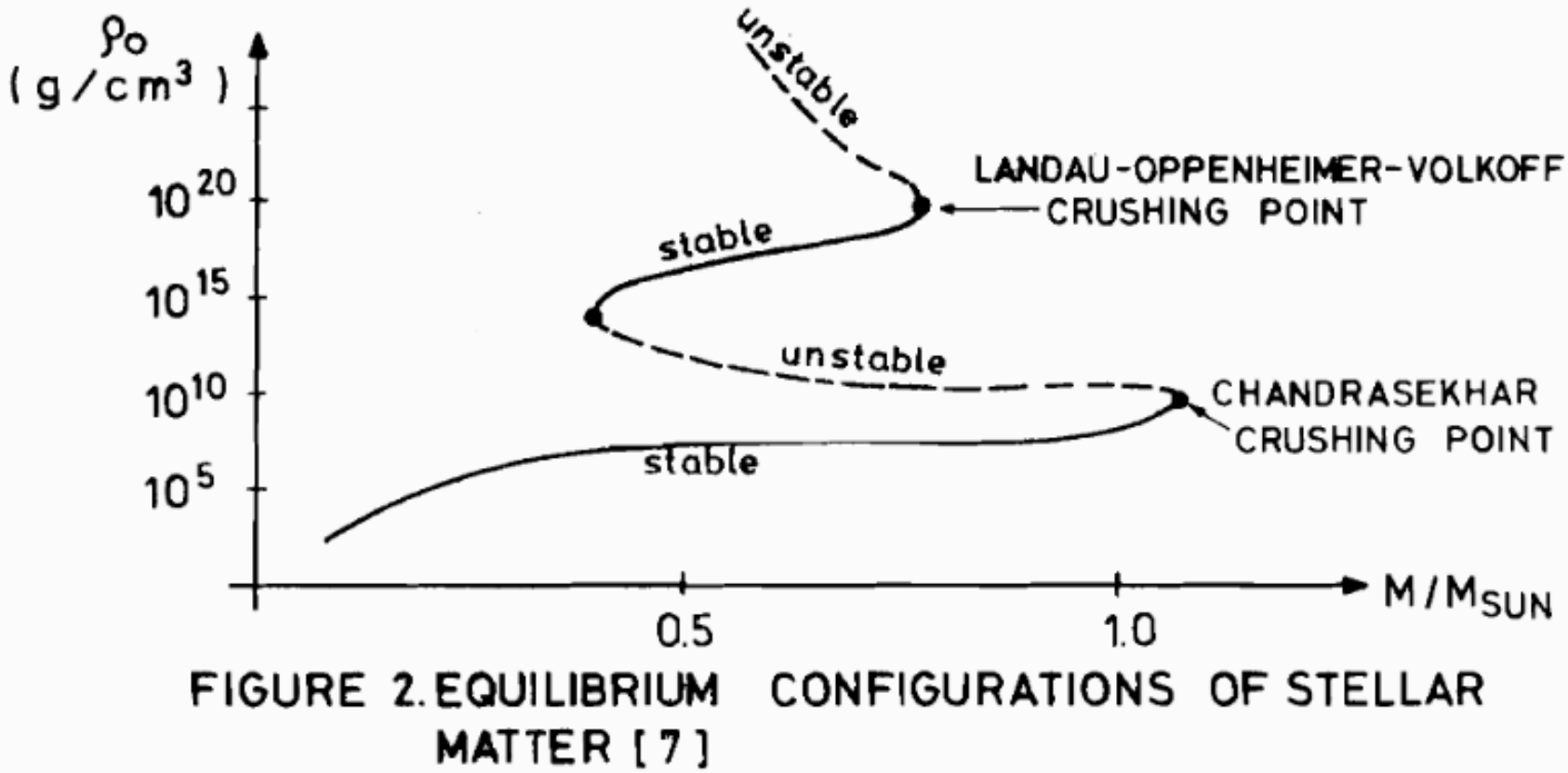


Figura 3: Colapso de estrelas ocorrem em pontos singulares

Exemplo I: Campos Vetoriais

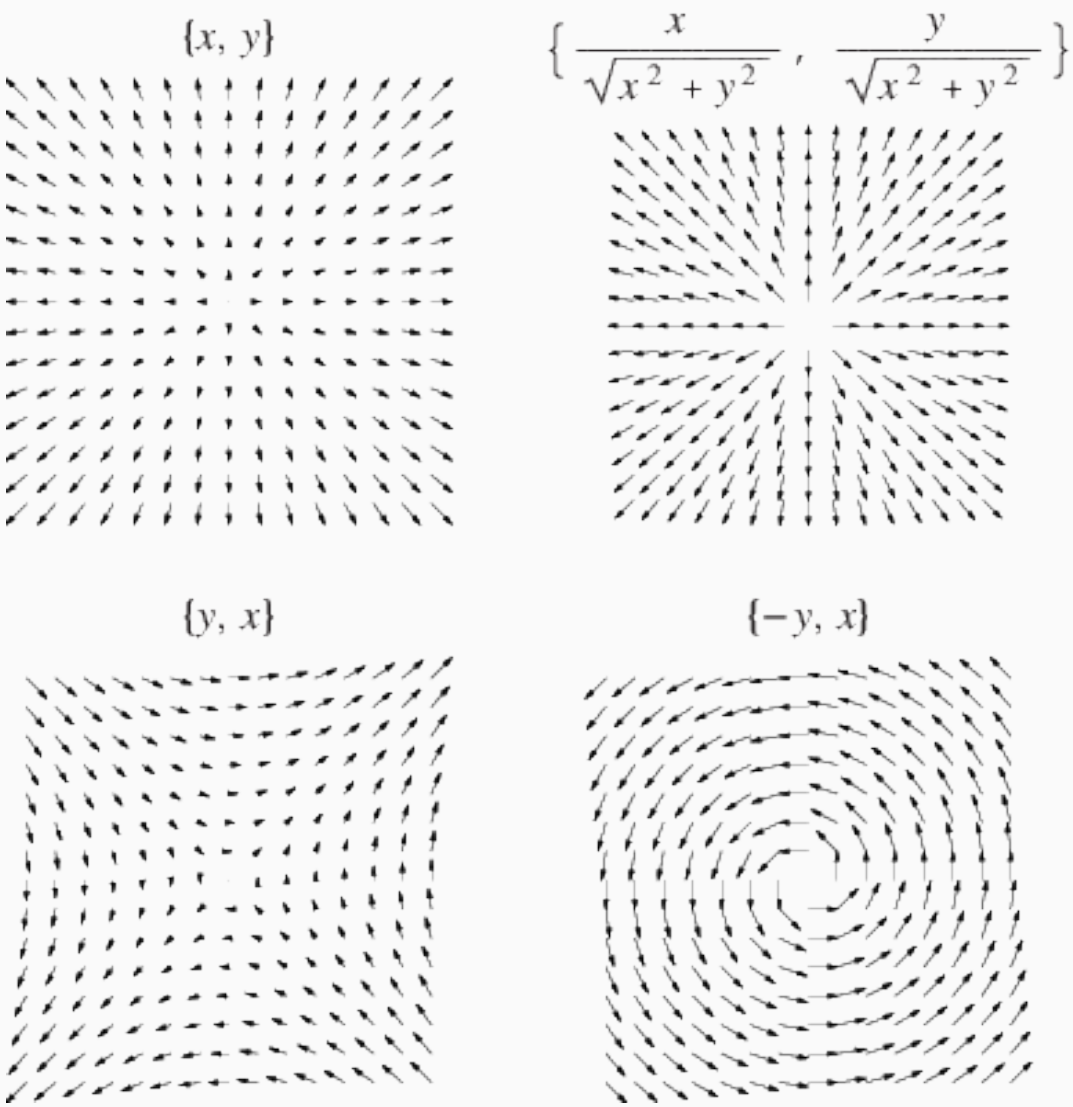


Figura 4: Campos Vetoriais com Singularidade na Origem

Resultado Fundamental

Teorema (Poincaré-Hopf)
Seja M uma variedade compacta de dimensão n e X um campo vetorial com um número finito de singularidades. Então, o número n de voltas (orientadas) das linhas de fluxo de X ao redor das singularidades é igual a característica de Euler de M.

Resultado Fundamental

Teorema (Poincaré-Hopf)
Seja M uma variedade compacta de dimensão n e X um campo vetorial com um número finito de singularidades. Então, o número n de voltas (orientadas) das linhas de fluxo de X ao redor das singularidades é igual a característica de Euler de M.

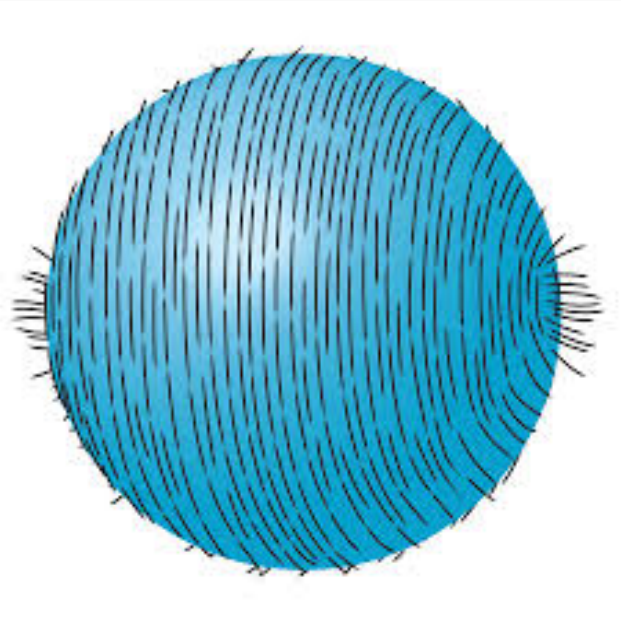


Figura 5: Não há campos de vetores sem singularidades na 2-esfera

Definição

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Dizemos que M é uma variedade diferenciável de dimensão n se existe uma cobertura por abertos $M = \cup_\alpha U_\alpha$ e homeomorfismos $\varphi : U_\alpha \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ tais que para quaisquer índices α, β vale que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi(U_\alpha) \cap \varphi(U_\beta) \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \cap \varphi(U_\beta)$$

é uma aplicação suave entre abertos de $\mathbb{R}^m$.

Definição

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Dizemos que M é uma variedade diferenciável de dimensão n se existe uma cobertura por abertos $M = \cup_\alpha U_\alpha$ e homeomorfismos $\varphi : U_\alpha \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ tais que para quaisquer índices α, β vale que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi(U_\alpha) \cap \varphi(U_\beta) \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \cap \varphi(U_\beta)$$

é uma aplicação suave entre abertos de $\mathbb{R}^m$.

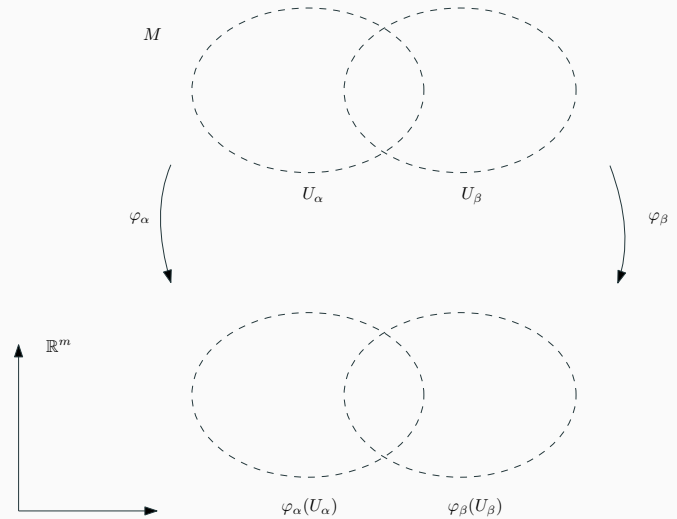


Figura 6: Cartas locais de uma variedade diferenciável

Teorema (Imersão de Whitney)
Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Então, existe uma imersão $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ que não é necessariamente injetiva.

Resultados Fundamentais

Teorema (Imersão de Whitney)
Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Então, existe uma imersão $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ que não é necessariamente injetiva.

Teorema (Mergulho de Whitney)
Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Então, existe um mergulho de M em $\mathbb{R}^{2n}$.

Corolário
Toda variedade diferenciável M pode ser vista como uma subvariedade de um espaço Euclideano.

Exemplo II: Variedades Singulares

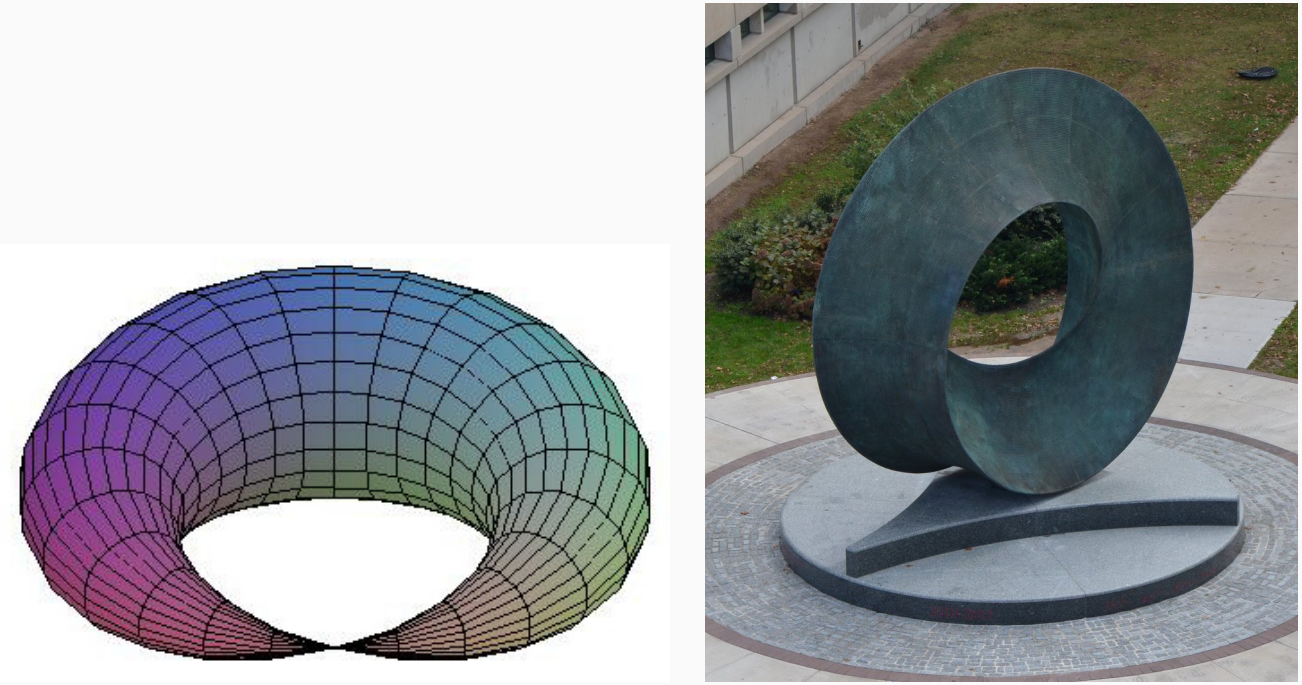


Figura 7: Toro pinçado e o toro umbílico, respectivamente

Exemplo II: Variedades Singulares

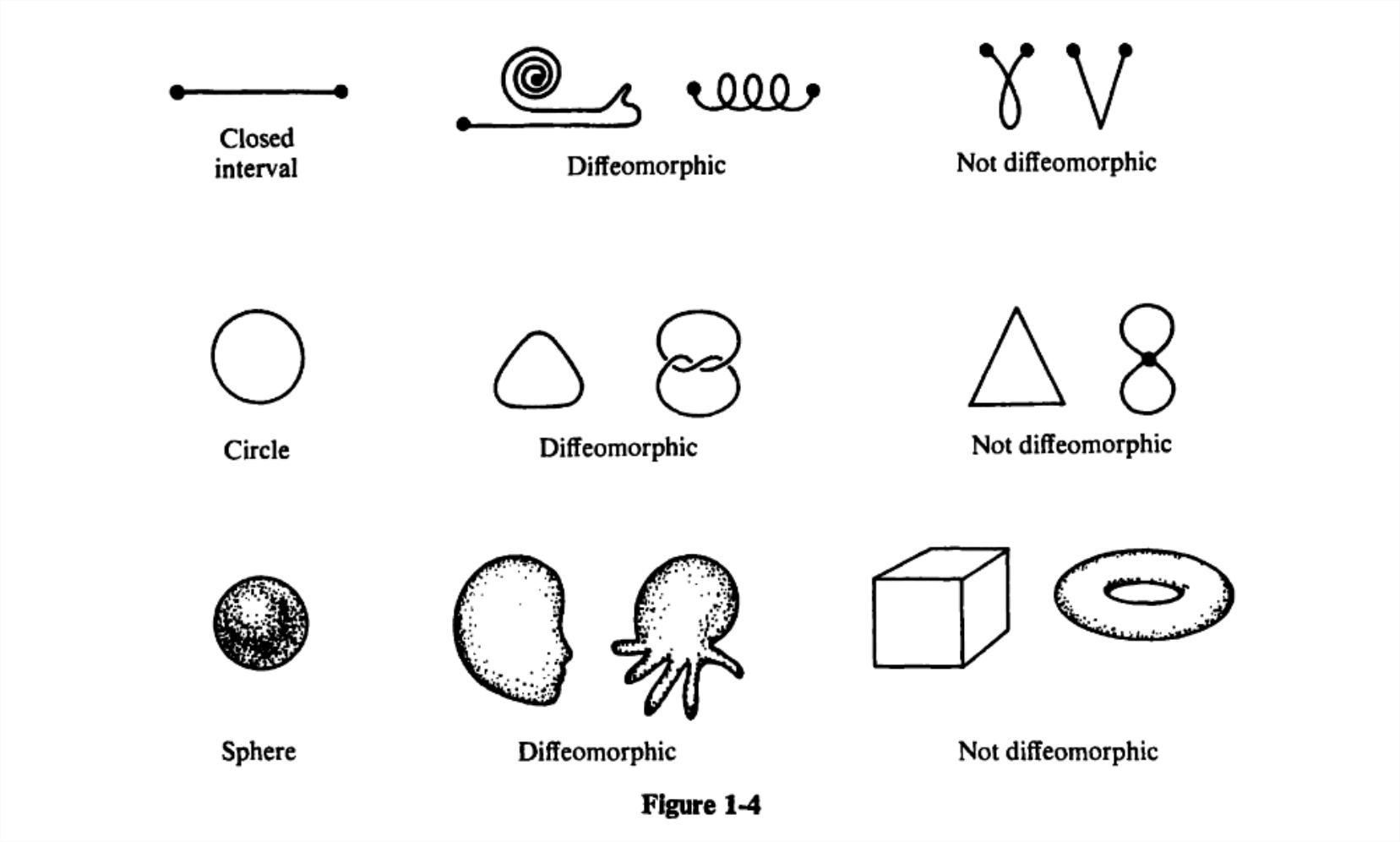


Figura 8: Exemplos de variedades suaves e singulares

Observações sobre Variedades Singulares

Observação

- Não há a noção de espaço tangente bem definida.
- Consequentemente, não há estruturas métricas imediatas a serem consideradas.
- Surgem perguntas do ponto de vista da topologia.

Resultado Fundamental

Teorema (Milnor)
Seja $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função holomorfa com uma singularidade em* $0 \in \mathbb{C}^n$. *Então, para uma esfera centrada na origem e suficientemente pequena, o mapa*

$$\varphi_f := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

é uma fibração localmente trivial.

Resultado Fundamental

Teorema (Milnor)
Seja $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função holomorfa com uma singularidade em* $0 \in \mathbb{C}^n$. *Então, para uma esfera centrada na origem e suficientemente pequena, o mapa*

$$\varphi_f := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

é uma fibração localmente trivial.

- Se f tem singularidade isolada, as fibras $\varphi_f^{-1}(\theta)$ são homotopicamente equivalentes a um buquê de esferas.
- O número de esferas em tal bouquet é conhecido como número de Milnor.
- Para $c \in \mathbb{C}^*$ pequeno, as fibras $f^{-1}(c)$ são localmente difeomorfas às fibras $\varphi_f^{-1}(\theta)$.

Exemplo III: Aplicações Diferenciáveis

Definição
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação suave, onde* U *é um aberto.*

1. *Se* $n \geq m$ *e* $\operatorname{rank}_p(F) = m$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma submersão.*

2. *Se* $n \leq m$ *e* $\operatorname{rank}_p(F) = n$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma imersão.*

3. *Um ponto* $p \in U$ *é um ponto crítico, também chamado de ponto singular, se* $\operatorname{rank}_p(F)$ *não é máximo.*

Exemplo III: Aplicações Diferenciáveis

Definição
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação suave, onde* U *é um aberto.*

1. *Se* $n \geq m$ *e* $\text{rank}_p(F) = m$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma submersão.*

2. *Se* $n \leq m$ *e* $\text{rank}_p(F) = n$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma imersão.*

3. *Um ponto* $p \in U$ *é um ponto crítico, também chamado de ponto singular, se* $\text{rank}_p(F)$ *não é máximo.*

Exemplo

1. A função $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ possui uma única singularidade na origem de $\mathbb{R}^3$.

2. A função $f(x, y, z) = xyz$ possui uma singularidade não isolada na origem.

3. A aplicação $F(x, y) = (x, x + y^2)$ possui uma singularidade isolada na origem.

Formas Locais I

Teorema (Função Inversa)
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação diferenciável em um ponto* $p \in U$. *Se* $\det(J_F(p)) \neq 0$, *então existe um aberto* $\widetilde{U} \subset U$ *contendo* p *e um aberto* W *contendo* $F(p)$ *tal que* $F : \widetilde{U} \longrightarrow W$ *é um difeomorfismo.*

Formas Locais I

Teorema (Função Inversa)
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em um ponto $p \in U$. Se $\det(J_F(p)) \neq 0$, então existe um aberto $\widetilde{U} \subset U$ contendo p e um aberto W contendo $F(p)$ tal que $F : \widetilde{U} \longrightarrow W$ é um difeomorfismo.

Definição
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é um aberto.

1. *O rank de F em um ponto $p \in U$, denotado por $\operatorname{rank}_p F$ é o rank da aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*
2. *Se $m = 1$, o corank de f em p, denotado por $\operatorname{corank}_p(f)$ é o coposto da matriz Hessiana $H_f(p)$.*

Corolário (Forma Local de Imersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Formas Locais II

Corolário (Forma Local de Imersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Corolário (Forma Local de Submersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma submersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Resultados Fundamentais I

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto crítico $p \in U$ é dito ser uma singularidade de Morse se $\det(H_f(p)) \neq 0$. Um ponto de Morse é também chamado de ponto crítico não-degenerado.

Resultados Fundamentais I

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto crítico $p \in U$ é dito ser uma singularidade de Morse se $\det(H_f(p)) \neq 0$. Um ponto de Morse é também chamado de ponto crítico não-degenerado.

Lema (Morse)
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $p \in U$ é uma singularidade de tipo Morse, então existem coordenas em torno de p e $f(p) \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Resultados Fundamentais II

Teorema (Arnold)
Seja $f \in \mathfrak{m}_n^2$ um germe simples e finitamente determinado. Então f é equivalente a uma, e somente uma, das singularidades abaixo a menos da soma por uma forma quadrática $q(z)$. Além disso, todo germe abaixo é simples.

Tipo	***Forma Normal***	$\mathcal{R}_e - \text{codim}$
$A_k^{\pm}, k \geq 1$	$\pm x^{k+1} + q(z)$	k
$D_k^{\pm}, k \geq 4$	$x^2 y \pm y^{k-1} + q(z)$	k
$E_6^{\pm}$	$x^3 \pm y^4 + q(z)$	6
E_7	$x^3 + xy^3 + q(z)$	7
E_8	$x^3 + y^5 + q(z)$	8

Teorema (Catástrofes de Thom)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma deformação versal tal que* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Então,* V *é* $\mathcal{P}-\mathcal{R}^+$*-equivalente a uma, e somente uma, das deformações abaixo:*

Tipo	***Singularidade***	***Deformação Versal***	***Nome***
A_2	x^3	$x^3 + u_1 x$	*Ponto*
A_3	x^4	$\pm x^4 + u_2 x^2 + u_1 x$	*Cúspide*
A_4	x^5	$x^5 + u_3 x^3 + u_2 x^2 + u_1 x$	*Rabo de Andorinha*
A_5	x^6	$\pm x^6 + u_4 x^4 u_3 x^3 + u_2 x^2 + u_1 x$	*Borboleta*
D_4^-	$x^3 + y^3$	$x^3 - xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2 y + u_1 x$	*Hiperbólica Umbílica*
D_4^+	$x^3 + 3xy^2$	$x^3 + y^3 + u_3 xy + u_2 y + u_2 x$	*Elíptica Umbílica*
D_5	$x^2 y + y^4$	$x^2 y + y^4 + u_4 y^2 + u_3 x^2 + u_2 y + u_1 x$	*Parabólica Umbílica*

Conteúdo

Sobre o Curso

Introdução

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Objetivos e Ferramentas

Exercícios

Extremos de Funções I

Definição

1. *Um ponto $p \in U$ é dito ser um máximo local (respectivamente, mínimo) se $f(p) > f(x)$ (respectivamente, $f(p) < f(x)$) para todo x em um bola suficientemente pequena em torno de p.*

2. *Um ponto crítico $p \in U$ é dito ser um ponto de sela se para toda bola aberta centrada em p existem pontos no domínio maiores e menores que $f(p)$.*

Extremos de Funções II

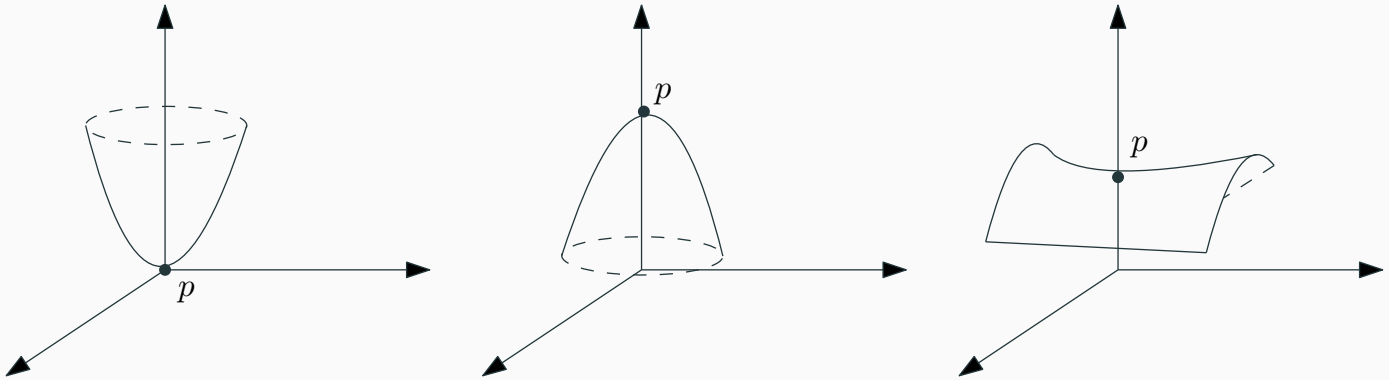


Figura 9: Três tipos de pontos críticos para funções de duas variáveis

Extremos de Funções II

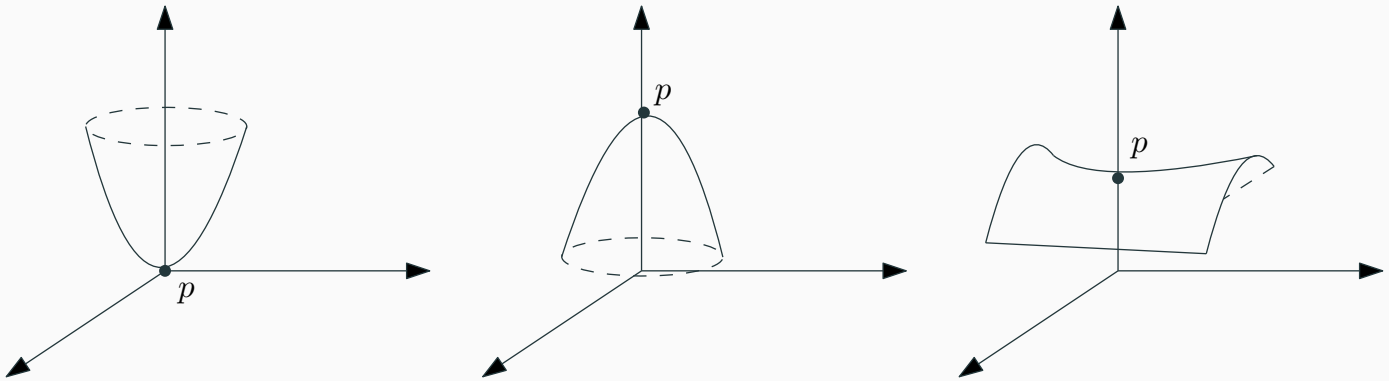


Figura 9: Três tipos de pontos críticos para funções de duas variáveis

Teorema
Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, onde U é um aberto. Se $p \in U$ é um ponto de máximo ou mínimo local, então p é um ponto crítico de f.

Extremos de Funções III

Observação
Considere a expansão de Taylor de f em torno de um ponto crítico $p \in U$. Como as derivadas parcias de primeira ordem se anulam, é possível concluir que H_f *aproxima* linearmente a função f em uma tal vizinhança.

Extremos de Funções III

Observação
Considere a expansão de Taylor de f em torno de um ponto crítico $p \in U$. Como as derivadas parcias de primeira ordem se anulam, é possível concluir que H_f *aproxima* linearmente a função f em uma tal vizinhança.

Teorema
Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, onde U é um aberto e suponha $p \in U$ um ponto crítico de f.

1. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são positivos, então p é um mínimo local.*
2. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são negativos, então p é um máximo local.*
3. *Se $n = 2$ e $H_f(p)$ possui somente autovalores negativos ou positivos, p é um ponto de sela.*
4. *Se $\det(H_f(p)) = 0$, o teste é inconclusivo.*

Gravitação Universal

Toda partícula de matéria no universo atrai qualquer outra partícula com uma força cuja direção é dada pela reta as une e que possui uma magnitude que é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Potenciais

Gravitação Universal
Toda partícula de matéria no universo atrai qualquer outra partícula com uma força cuja direção é dada pela reta as une e que possui uma magnitude que é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um sistema gradiente $\mathcal{S}$ definido em U e determinado pelo funcional potencial V é um sistema cujo comportamento é descrito pela diferencial ∇V. A soluções da equação $\nabla V = 0$ são chamadas estados de equilíbrio de $\mathcal{S}$.

Exemplo 0: Equações de Euler-Lagrange

- Considere uma partícula no espaço $\mathbb{R}^n$ cuja posição é $x = x(t)$.
- Lagrangeana: $L := T - P$, onde T é a energia cinética e P a potencial.
- $\Omega\left(x(t_0), x(t_f)\right)$: espaço dos caminhos entre $x(t_0)$ e $x(t_f)$.
- Funcional ação: $V = \int_{t_0}^{t_f} L(\lambda, \dot{\lambda}, t)dt$.

Exemplo 0: Equações de Euler-Lagrange

- Considere uma partícula no espaço $\mathbb{R}^n$ cuja posição é $x = x(t)$.
- Lagrangeana: $L := T - P$, onde T é a energia cinética e P a potencial.
- $\Omega\left(x(t_0), x(t_f)\right)$: espaço dos caminhos entre $x(t_0)$ e $x(t_f)$.
- Funcional ação: $V = \int_{t_0}^{t_f} L(\lambda, \dot{\lambda}, t)dt$.

Teorema
Se um caminho $\lambda(t)$ é um ponto crítico do funcional V, então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \forall \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 0: Princípio de Hamilton

Vamos admitir o Princípio de Hamilton, o qual afirma que a trajetória da partícula deve ser um caminho que minimiza (ou maximiza) a ação V e, portanto, é solução das equações anteriores.

Exemplo 0: Princípio de Hamilton

Vamos admitir o Princípio de Hamilton, o qual afirma que a trajetória da partícula deve ser um caminho que minimiza (ou maximiza) a ação V e, portanto, é solução das equações anteriores.

- Partícula de massa m e $x = x(t)$.
- Lagrangeana: $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2\right) + V(\mathbf{x})$.
- As equações anteriores implicam que: $m\ddot{x}_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n$.
- Na forma vetorial: $m\ddot{\mathbf{x}} = \nabla V$.

Exemplo I: Máquina de Zeeman

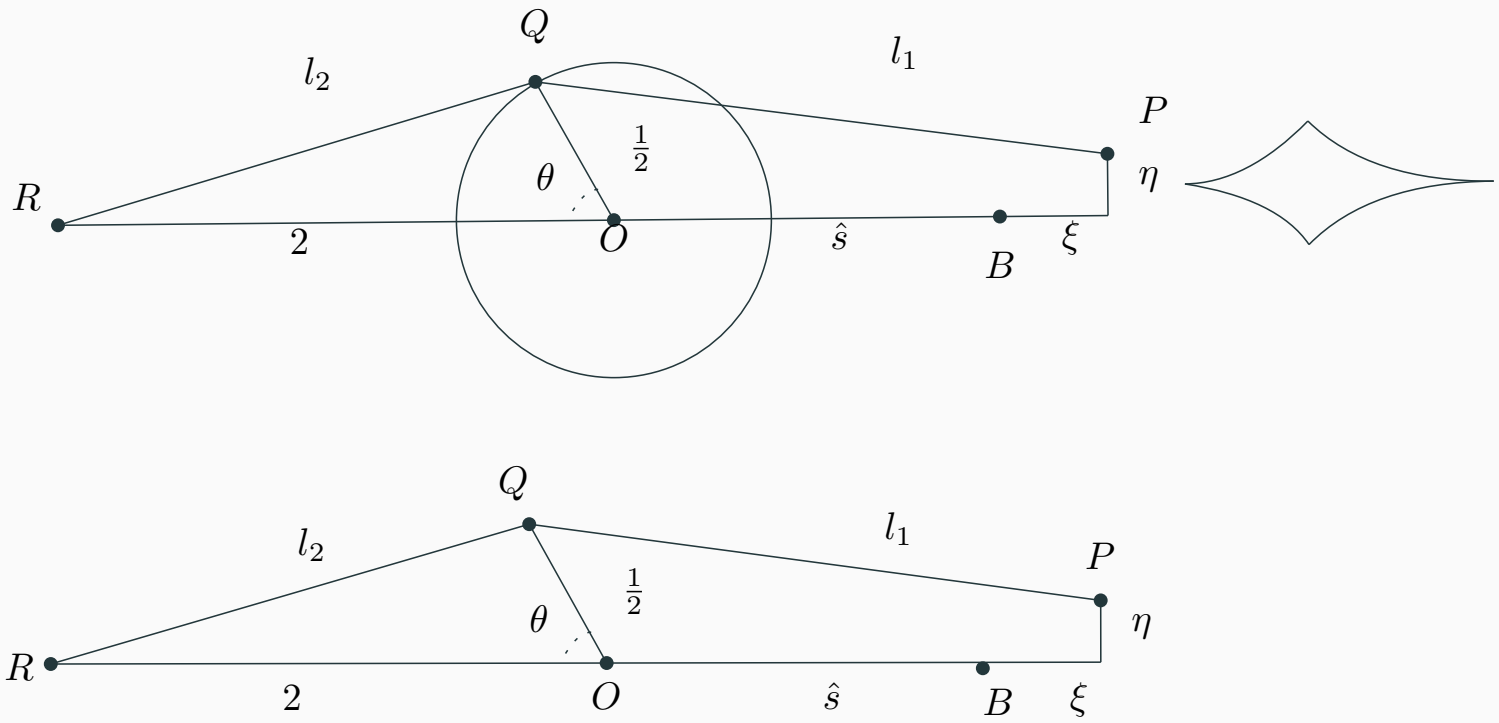


Figura 10: A máquina de Zeeman e seus pontos de discontinuidade

Vídeo demonstrativo

Exemplo I: Máquina de Zeeman

- Pela lei dos senos e cossenos, temos que

$$l_1^2 = \left(s + \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \eta\right)^2$$
$$l_2^2 = 4 + \frac{1}{4} - 2\cos\theta$$

  onde $s = \tilde{s} + \xi$.

- Energia potencial: $V(\theta) = \mu\left[(l_1 - 1)^2 + (l_2 - 1)^2\right]$, onde supomos o raio do disco igual a 1.

Exemplo I: Máquina de Zeeman

- Pela lei dos senos e cossenos, temos que

$$l_1^2 = \left(s + \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \eta\right)^2$$
$$l_2^2 = 4 + \frac{1}{4} - 2\cos\theta$$

  onde $s = \tilde{s} + \xi$.

- Energia potencial: $V(\theta) = \mu\left[(l_1 - 1)^2 + (l_2 - 1)^2\right]$, onde supomos o raio do disco igual a 1.

- Seu estudo qualitativo envolverá calcular os pontos críticos e determinar sua natureza.

- Teorema de Thom implicará que, a menos de mudança de coordenadas, temos que

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx,$$

Exemplo II: Explosões Estelares

- Estrelas estão em Equilíbrio Hidrostático.
- Quando seu combustível nuclear acaba, entram em colapso.
- Podem se transformar em white dwarfs ou black holes.

Exemplo II: Explosões Estelares

- Estrelas estão em Equilíbrio Hidrostático.
- Quando seu combustível nuclear acaba, entram em colapso.
- Podem se transformar em white dwarfs ou black holes.

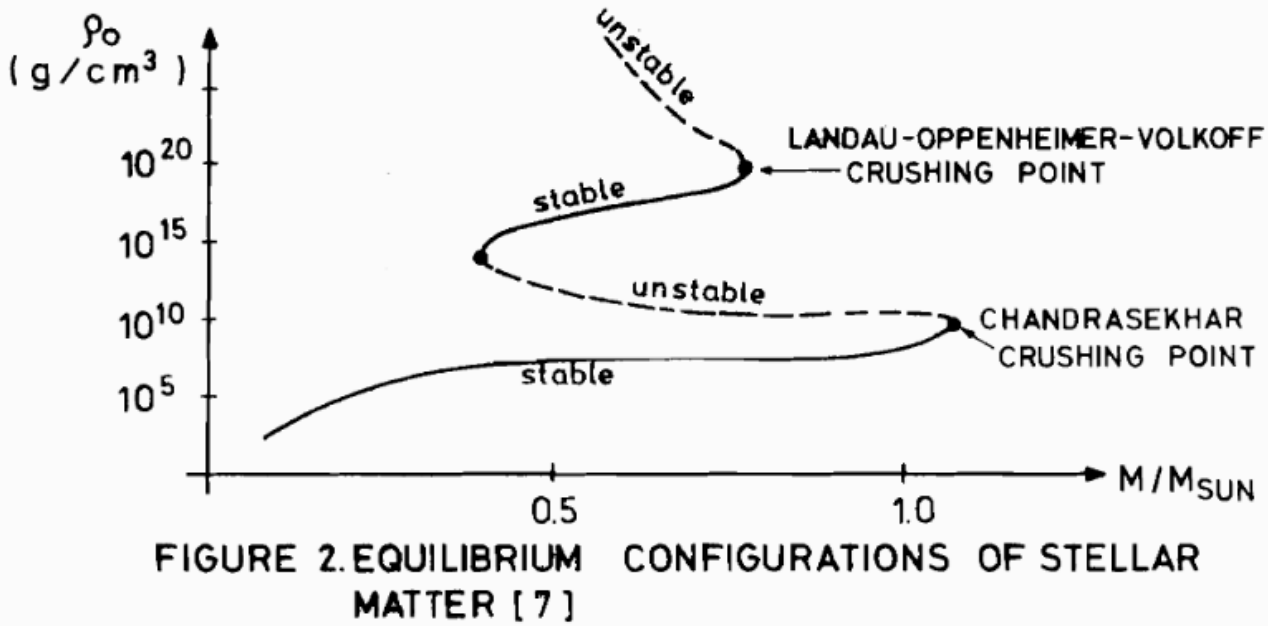


Figura 11: Estados de equilíbrio de uma estrela com parâmetros massa e densidade

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla V$.*

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla V$.*

1. Identificar os parâmetros do sistema.

2. Identificar as relações entre os parâmetros.

3. Identificar o funcional potencial e o significado físico de suas soluções estacionárias.

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla V$.*

1. Identificar os parâmetros do sistema.

2. Identificar as relações entre os parâmetros.

3. Identificar o funcional potencial e o significado físico de suas soluções estacionárias.

Definição
Seja $\mathcal{S}$ um sistema de estados de equilíbrio determinado por um funcional potencial $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto. Se $\det(H_V(p)) = 0$ para algum $p \in U$, então dizemos que $\mathcal{S}$ é discontínuo em p.

A Abordagem de Thom

...the underlying forces in nature can be described by smooth surfaces of equilibrium, it is when the equilibrium breaks down that catastrophes occur. The problem for catastrophe theory is therefore to describe the shapes of all possible equilibrium surfaces. Thom has solved this problem in terms of a few archetypal forms, which he calls elementary catastrophes. The proof of Thom's theorem is a difficult one, but the results of the proof are relatively easy to comprehend. The elementary catastrophes themselves can be understood and applied to problems in the sciences without reference to the proof.

C. Zeeman, Scientific American, 1976.

A Abordagem de Thom

...the underlying forces in nature can be described by smooth surfaces of equilibrium, it is when the equilibrium breaks down that catastrophes occur. The problem for catastrophe theory is therefore to describe the shapes of all possible equilibrium surfaces. Thom has solved this problem in terms of a few archetypal forms, which he calls elementary catastrophes. The proof of Thom's theorem is a difficult one, but the results of the proof are relatively easy to comprehend. The elementary catastrophes themselves can be understood and applied to problems in the sciences without reference to the proof.

C. Zeeman, Scientific American, 1976.



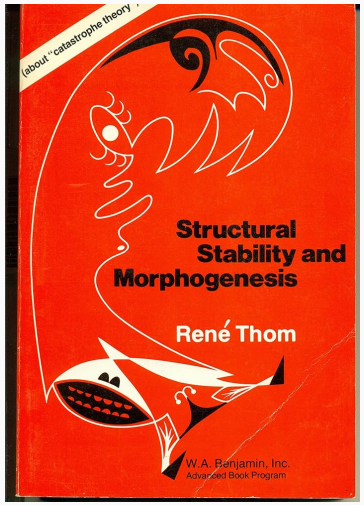


Figura 12: René Thom e seu ensaio de 1972

Conteúdo

Sobre o Curso

Introdução

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Objetivos e Ferramentas

Exercícios

Objetivos

Dado um sistema $\mathcal{S}$ definido como estados de equilíbrio de um germe de funcional potencial V, encontrar uma forma local para V, também chamada de forma normal, de maneira que o estudo qualitativo de $\mathcal{S}$ possa ser simplificado.

A noção de Germes

Definição

Sejam $U, W \ni 0$ conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

1. *Se existe um aberto $X \ni 0$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \cap X = W \cap X$, então dizemos que U e W definem o mesmo germe de conjunto na origem.*

2. *Sejam $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves definidas nos abertos U e W satisfazendo $F(0) = G(0) = 0$. Se existe um aberto $X \ni 0$ tal que $X \subset U \cap W$ e $F_{|X} = G_{|X}$, então dizemos que F e G definem o mesmo germe de aplicação.*

A noção de Germes

Definição

Sejam $U, W \ni 0$ conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

1. *Se existe um aberto $X \ni 0$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \cap X = W \cap X$, então dizemos que U e W definem o mesmo germe de conjunto na origem.*

2. *Sejam $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves definidas nos abertos U e W satisfazendo $F(0) = G(0) = 0$. Se existe um aberto $X \ni 0$ tal que $X \subset U \cap W$ e $F_{|X} = G_{|X}$, então dizemos que F e G definem o mesmo germe de aplicação.*

Definição

O conjunto dos germes $F : (\mathbb{R}^n\, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ de aplicações suaves na origem é denotado por $\mathcal{E}_{n,m}$. Quando $m = 1$, escrevemos $\mathcal{E}_{n,1} = \mathcal{E}_n$.

Exemplos

Exemplo
Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que $0 \in M$. Então, o germe de conjunto definido por M na origem é o germe, na origem, de um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ mergulhado em $\mathbb{R}^3$, visto que toda superfície regular é localmente equivalente a tal conjunto. A mesma conclusão vale para qualquer variedade mergulhada $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in M$.

Exemplos

Exemplo
Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que $0 \in M$. Então, o germe de conjunto definido por M na origem é o germe, na origem, de um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ mergulhado em $\mathbb{R}^3$, visto que toda superfície regular é localmente equivalente a tal conjunto. A mesma conclusão vale para qualquer variedade mergulhada $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in M$.

Exemplo
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave tal que $0 \in U$ e $F(0) = 0$. Se F é uma imersão ou uma submersão, então o germe $F : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ é, a menos de uma mudança de coordenadas, completamente determinado pelas formas locais acima.

Grupo $\mathcal{R}$

Definição

1. *Seja* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação suave. Se existem abertos* $U, W \subset \mathbb{R}^n$ *tais que* $\phi : U \longrightarrow W$ *é bijetora cuja inversa também é suave, então chamamos* ϕ *de um difeomorfismo local.*

2. *O grupo* $\mathcal{R}$ *consiste de germes de difeomorfismos* $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Exemplo
O mapa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ é um difeomorfismo local, mas não global.

Grupo $\mathcal{R}$

O grupo $\mathcal{R}$ age no espaço $\mathcal{E}_n$ de germes de funções suaves da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ (\phi, f) &\longmapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

No entanto, $\mathcal{R}$ não é um grupo de Lie e tampouco $\mathcal{E}_n$ uma variedade suave.

Grupo $\mathcal{R}$

O grupo $\mathcal{R}$ age no espaço $\mathcal{E}_n$ de germes de funções suaves da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ (\phi, f) &\longmapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

No entanto, $\mathcal{R}$ não é um grupo de Lie e tampouco $\mathcal{E}_n$ uma variedade suave.

Definição
Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são $\mathcal{R}$-equivalentes, ou simplesmente equivalentes, se existe $\phi \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ \phi^{-1} = g$. Usualmente, denotamos tal relação por $f \sim_{\mathcal{R}} g$.

Exemplos da $\mathcal{R}$-equivalência

Exemplo
Sejam $f = x^2 + y^2 - y^4x^4$ e $g = x^2 + y^2 - 2y^3x^2$ germes de funções. Então $f \sim_{\mathcal{R}} g$ pelo germe de difeomorfismo definido por

$$x \longmapsto x$$
$$y \longmapsto y - x^2y^2$$

Exemplos da $\mathcal{R}$-equivalência

Exemplo
Sejam $f = x^2 + y^2 - y^4x^4$ e $g = x^2 + y^2 - 2y^3x^2$ germes de funções. Então $f \sim_{\mathcal{R}} g$ pelo germe de difeomorfismo definido por

$$x \longmapsto x$$
$$y \longmapsto y - x^2y^2$$

Exemplo
Sejam $f = x^3 - y^3$ e $g = y^3 + 3x^2y$ germes de funções. Então $f \sim_{\mathcal{R}} g$ pelo germe de difeomorfismo definido por

$$x \longmapsto x + y$$
$$y \longmapsto x - y$$

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

- Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem tal que $f = g \circ \phi$.
- Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_i} \right).$$

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

- Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem tal que $f = g \circ \phi$.
- Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_i} \right).$$

- Portanto $H_f = H_g \cdot J_\phi + \nabla(g) \cdot M$.
- J_ϕ - matriz Jacobiana de ϕ, $\nabla(g)$ - gradiente de g e M - matriz que depende das derivadas parciais de ordem maior que 2 das funções coordenadas de ϕ.
- $H_f(0) = H_g(0) \cdot J_\phi(0)$ e $J_\phi(0)$ é invertível.

□

Resumo

- **Fenômenos**: Contínuos e Discontínuos descritos por potenciais.
- **Princípio**: Hipótese de otimizar tal potencial.
- **Objetivo**: Encontrar formas normais locais para um estudo qualitativo.

Resumo

- **Fenômenos**: Contínuos e Discontínuos descritos por potenciais.
- **Princípio**: Hipótese de otimizar tal potencial.
- **Objetivo**: Encontrar formas normais locais para um estudo qualitativo.
- **Motivação**: Teorema da Função Inversa e formas locais de imersões e submersões.
- **Ferramentas**: Noção de germes e ação do grupo $\mathcal{R}$ de mudanças diferenciáveis de coordenadas.
- **Condições técnicas**: Estabilidade estrutural e princípios de Maxwell e do Retardamento.

Conteúdo

Sobre o Curso

Introdução

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Objetivos e Ferramentas

Exercícios

Exercício
Mostre que uma submersão $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leva abertos contidos em U em abertos de $\mathbb{R}^m$.

Exercício
Determine os pontos críticos das funções abaixo e a natureza de cada um deles, ou seja, se é isolado, máximo, mínimo ou ponto de sela.

1. $f(x, y) = x^2 + y^3$.
2. $f(x, y) = x^2 + 11xy + \frac{y^2}{2} + x^6$.
3. $f(x, y) = 10xy + y^2 + 75y^3$.

Exercício
Mostre que as noções de germes de conjunto e aplicações determinam uma relação de equivalência bem definida.

Exercício

1. *Se* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então os germes de conjuntos* $f^{-1}(0)$ *e* $g^{-1}(0)$ *são difeomorfos.*
2. *Encontre contra-exemplos para a recíproca do item anterior.*

Exercício

1. *Mostre que os germes* $x^2 - y^2$ *e* $x^2 - y^3$ *não são equivalentes.*
2. *Mostre que os germes* $x^2 + y^2$ *e* $x^{2n} + y^{2m}$, *onde* $n, m \geq 2$, *não são equivalentes.*
3. *Mostre que os germes* $xy + Axz^2 + Byz^2$ *e* $x^2 - y^2 + ABz^4$, *onde* $AB \neq 0$, *são equivalentes.*

Exercício

1. *Verifique que* $\mathcal{E}_n$ *é um anel comutativo com identidade.*
2. *Seja* $\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}$. *Mostre que* $\mathfrak{m}_n$ *é o único ideal maximal de* $\mathcal{E}_n$.
3. *Verifique que* $\mathcal{E}_{n,m}$ *é um* $\mathcal{E}_n$*-módulo.*