Секция 6
«ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

УДК 519.7

А. Н. НЕХОРОШИХ
Университет ИТМО, Санкт-Петербург

МЕТОД БЭКСТЕППИНГА ДЛЯ СТРУКТУРНО НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Предлагается робастный алгоритм управления стационарными параметрически и структурно неопределенными линейными объектами при наличии внешних ограниченных возмущений. Разработанный на базе модифицированного метода бэкстеппинга алгоритм обеспечивает слежение скалярного выхода объекта за гладким ограниченным эталонным сигналом с заданной точностью и за конечное время.

Введение

Проблема управления параметрически и структурно неопределенными объектами при наличии внешних возмущений была и остается одной их актуальных задач в теории управления. Например, структурная неопределенность может возникать при решении задач математической физики, когда дифференциальное уравнение в частных производных заменяется системой n уравнений в обыкновенных производных. Таким образом, число уравнений n определяет порядок объекта управления. В процессе исследования модель объекта управления может уточняться, следовательно, будет меняться и ее порядок.

На сегодняшний день предложено множество методов и подходов к построению адаптивных и робастных алгоритмов управления неопределенными объектами. Из всего множества можно выделить три классических подхода [1]: метод расширенной ошибки, алгоритмы адаптации высокого порядка и метод бэкстеппинга (backstepping, известный также под названиями адаптивный или робастный обход интегратора). Метод бэкстеппинга обеспечивает высокое качество переходных процессов без увеличения амплитуды управления и невысокий динамический порядок замкнутой системы [1].

Впервые метод бэкстеппинга был предложен в [10] для создания адаптивного управления нелинейными объектами по выходу. В настоящее время существует достаточное количество модификаций этого метода [3–5, 8, 11–13, 15–17]. Так, в [1, 13] рассмотрен адаптивный и робастный регулятор для управления

Научный руководитель д.т.н. И.Б. Фуртат.

линейными системами по выходу. Эти подходы основаны на особой параметризации уравнения объекта, позволяющей получить производную его выходной переменной. В робастном алгоритме [1], в отличие от [8, 11, 12, 16], не использовалась идентификация неизвестных параметров объекта.

Подходам [1, 3–5, 8–13,15–17], основанным на итеративных процедурах синтеза, присущи два основных недостатка, которые подробно описаны в [1], – сложность аналитических расчетов системы управления и проблемы, связанные с ее технической реализацией. Решение обеих этих проблем было предложено в [2, 6], где в системе управления реализуется всего один фильтр размерности n (n – порядок объекта управления), а для вычисления производных стабилизирующих сигналов управления используются реальные дифференцирующие звенья.

Параметризация уравнения объекта, используемая в [2, 6], не позволяет синтезировать регулятор, робастный по отношению к динамическому порядку объекта управления, поскольку данная параметризация предполагает, что порядок объекта управления известен и постоянен.

В настоящее время существуют решения по управлению объектами с неопределенным динамическим порядком модели объекта управления, например, [7, 14]. Однако полученные в [7, 14] системы управления имеют сложный аналитический расчет и большой динамический порядок алгоритма управления.

В настоящей работе предложен робастный закон управления на базе модифицированного метода бэкстеппинга. Показано, что в системе управления реализуется всего один фильтр, что позволяет значительно уменьшить динамический порядок регулятора по сравнению с [13]. Полученный алгоритм обеспечивает требуемую динамическую точность. Алгоритм может быть использован для управления техническими системами по выходу, модель которых описывается линейным дифференциальным уравнением с неизвестными параметрами, принадлежащими компактному множеству, и подвержена внешним ограниченным возмущениям.

Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t), \tag{1}$$

где $y(t)$, $u(t)$и $f(t)$ – скалярные выход, вход и возмущающее воздействие соответственно, $|f(t)| \le \alpha$, α – известна; $Q(p) = p^n + q_{n-1}p^{n-1} + ... + q_0$, $R(p) = r_m p^m + r_{m-1}p^{m-1} + ... + r_0$ – линейные стационарные дифференциальные операторы порядка n и m соответственно; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Пусть желаемое поведение регулируемой переменной $y(t)$ задается эталонной моделью

$$Q_0(p)y_m(t) = k_m\, r(t), \tag{2}$$

где $y_m(t)$ – выход эталонной модели, $r(t)$ – кусочно-непрерывное ограниченное задающее воздействие, $k_m > 0$ – постоянный коэффициент, $Q_0(p)$ – известный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Требуется найти такой закон управления, чтобы при любых начальных условиях все сигналы в замкнутой системе были ограниченными функциями времени и дополнительно выполнялось целевое условие

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists \ \ T > 0 : |y - y_m| < \delta \text{ при } t > T , \qquad (3)$$

где $T > 0$ – время переходного процесса.

Введем следующие предположения.

1. Коэффициенты операторов $Q(p)$ и $R(p)$ – неизвестные числа, принадлежащие известному компактному множеству Ξ.
2. Порядки операторов $Q(p)$ и $R(p)$ неизвестны.
3. Полином $Q_0(\lambda)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная, $\deg Q_0(p) = \rho$, где $\rho \geq n - m$.
4. В системе управления не доступны измерению производные сигнала $y(t)$.

Метод решения

Представим дифференциальные операторы $Q(p)$ и $R(p)$ в следующем виде:

$$Q(p) = Q_m(p) + \Delta Q(p); \ R(p) = R_m(p) + \Delta R(p), \qquad (4)$$

где $Q_m(p)$, $R_m(p)$ – дифференциальные операторы, выбираемые разработчиком, такие что $Q_0(p) = Q_m(p) / R_m(p)$; $\Delta Q(p)$, $\Delta R(p)$ – дифференциальные операторы, дополняющие $Q_m(p)$ и $R_m(p)$ до $Q(p)$ и $R(p)$ соответственно.

Перепишем уравнение объекта управления (1) с учетом (4):

$$Q_m(p)y(t) + \Delta Q(p)y(t) = R_m u(t) + \Delta R(p)u(t) + f(t). \qquad (5)$$

Из (5) выразим выходную переменную $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{Q_0(p)} u(t) + \varphi(y(t), u(t), f(t)), \qquad (6)$$

где $\varphi(y(t), u(t), f(t)) = 1 / Q_m(p)(\Delta R(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + f(t))$ – функция, характеризующая параметрические неопределенности объекта управления и внешнее возмущающее воздействие.

Введем фильтр состояния

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t), \qquad (7)$$

где $v(t) = \left[v_1(t) v_2(t) \ldots v_\rho(t)\right]^T$; $A_0 = \begin{bmatrix} -k_0 & & & \\ -k_1 & & I_{\rho-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_{\rho-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$; $I_{\rho-1} \in R^{(\rho-1)\times(\rho-1)}$ – единичная матрица; $l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$; $Q_0(p) = p^\rho + k_0 p^{\rho-1} + \ldots + k_{\rho-1}$.

Из (7) следует, что

$$Q_0(p)v_1(t) = u(t). \qquad (8)$$

Вычитая из обеих частей уравнения (6) сигнал $y_m(t)$, получаем

$$e_1(t) = v_1(t) + \psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t)), \qquad (9)$$

где $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$ – ошибка слежения,

$$\psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t)) = \varphi(y(t), u(t), f(t)) - y_m(t).$$

Продифференцируем выражение (9) по времени, учитывая (7):

$$\dot{e}_1(t) = -k_0 v_1(t) + v_2(t) + \dot{\psi}(y(t), u(t), f(t), y_m(t)). \quad (10)$$

В соответствии с методом бэкстеппинга синтез закона управления состоит из ρ шагов. На первых $\rho - 1$ шагах формируются вспомогательные законы управления для стабилизации соответствующих подсистем. На ρ-м шаге формируется истинный закон управления $u(t)$.

Шаг 1. Пусть функция $v_2(t)$ является вспомогательным законом управления в (10). Определим $v_2(t)$ в виде $v_2(t) = U_1(t)$. С учетом того, что функция $\psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t))$ не может быть измерена, вспомогательный закон $U_1(t)$ запишем следующим образом:

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_0 v_1(t), \quad (11)$$

где $c_1 > 0$ и $\mu > 0$ – коэффициенты, выбираемые разработчиком.

Подставив (11) в (10), получим

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + \dot{\psi}(y(t), u(t), f(t), y_m(t)). \quad (12)$$

Шаг 2. Поскольку функция $v_2(t)$ не является истинным законом управления, введем новую функцию ошибки $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$. Учитывая (7), продифференцируем функцию $e_2(t)$ по времени

$$\dot{e}_2(t) = -k_1 v_1(t) + v_3(t) - \dot{U}_1(t). \quad (13)$$

Пусть функция $v_3(t)$ является вспомогательным законом управления в (13). Тогда определим $v_3(t)$ в виде $v_3(t) = U_2(t)$ и выберем $U_2(t)$ следующим образом:

$$U_2(t) = -c_2 e_2(t) + k_1 v_1(t) + \hat{U}_1(t), \quad (14)$$

где $c_2 > 0$ – коэффициент, выбираемый разработчиком; $\hat{U}_1(t)$ – оценка сигнала $\dot{U}_1(t)$.

Подставим (14) в (13)

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - \eta_1(t), \quad (15)$$

где $\eta_1(t) = \dot{U}_1(t) - \hat{U}_1(t)$ – ошибка оценки.

Шаг i $(3 \le i \le \rho - 1)$. Введем функцию ошибки $e_i(t) = v_i(t) - U_{i-1}(t)$. Продифференцируем функцию $e_i(t)$ по времени с учетом (7)

$$\dot{e}_i(t) = -k_{i-1} v_1(t) + v_{i+1}(t) - \dot{U}_{i-1}(t). \quad (16)$$

Пусть функция $v_{i+1}(t)$ является вспомогательным законом управления в (16). Тогда определим $v_{i+1}(t)$ в виде $v_{i+1}(t) = U_i(t)$ и выберем $U_i(t)$ следующим образом:

$$U_i(t) = -c_i e_i(t) + k_{i-1} v_1(t) + \hat{U}_{i-1}(t), \quad (17)$$

где $c_i > 0$ – коэффициент, выбираемый разработчиком; $\hat{U}_{i-1}(t)$– оценка сигнала $\dot{U}_{i\text{-}1}(t)$.

Подставим (17) в (16)

$$\dot{e}_i(t) = -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t), \quad (18)$$

где $\eta_{i-1}(t) = \dot{U}_{i-1}(t) - \hat{U}_{i-1}(t)$ – ошибка оценки.

Шаг ρ**.** Введем функцию ошибки $e_\rho(t) = v_\rho(t) - U_{\rho-1}(t)$. Продифференцируем функцию $e_\rho(t)$ по времени с учетом (7):

$$\dot{e}_\rho(t) = -k_{\rho-1}v_1(t) + u(t) - \dot{U}_{\rho-1}(t). \tag{19}$$

Выберем истинный закон $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = -c_\rho e_\rho(t) + k_{\rho-1}v_1(t) + \hat{U}_{\rho-1}(t), \tag{20}$$

где $c_\rho > 0$ – коэффициент, выбираемый разработчиком; $\hat{U}_{\rho-1}(t)$ – оценка сигнала $\dot{U}_{\rho-1}(t)$.

Подставим (20) в (19)

$$\dot{e}_\rho(t) = -c_\rho e_\rho(t) - \eta_{\rho-1}(t), \tag{21}$$

где $\eta_{\rho-1}(t) = \dot{U}_{\rho-1}(t) - \hat{U}_{\rho-1}(t)$ – ошибка оценки.

В силу предположения 4, приведенного в постановке задачи, сигналы $\dot{U}_{i-1}(t), i = \overline{2,\rho}$ недоступны измерению. Исходя из этого, на каждом шаге вводились оценки этих сигналов в виде функций $\hat{U}_{i-1}(t)$. Для реализации оценок производных сигналов $U_{i-1}(t)$ воспользуемся наблюдателями:

$$(\mu p + 1)\hat{U}_{i-1}(t) = pU_{i-1}(t), i = \overline{2,\rho}. \tag{22}$$

Выпишем полученную систему управления:

$$\dot{v} = A_0 v + lu;\ U_1 = -c_1\mu^{-1}e_1 + k_0 v_1;\ U_i = -c_i e_i + k_{i-1}v_1 + \hat{U}_{i-1};$$

$$(\mu p + 1)\hat{U}_{i-1} = pU_{i-1};\ u = -c_\rho e_\rho + k_{\rho-1}v_1 + \hat{U}_{\rho-1};\ i = \overline{2,\rho}. \tag{23}$$

Утверждение. *Пусть выполнены условия предположений* 1–4. *Тогда существуют числа* $c_i > 0, i = \overline{1,\rho}$, *и* $\mu_0 > 0$, *такие, что при* $\mu \le \mu_0$ *алгоритм управления* (23) *обеспечивает выполнение целевого условия* (3).

Доказательство утверждения аналогично доказательству утверждения в [15], так как структуры уравнений (12), (15), (18), (21) подобны структурам соответствующих уравнений в [15]. Идея доказательства сводится к приведению уравнений замкнутой системы (12), (15), (18), (21) к системе сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с малым коэффициентом μ.

Заключение

В работе предложен алгоритм линейного робастного управления, основанный на методе бэкстеппинга. Рассмотрено управление параметрически и структурно неопределенными линейными объектами с измеряемым скалярным выходом при наличии внешних возмущений.

В отличие от ранее известных методов, основанных на методе бэкстеппинга, здесь предложена система управления, робастная по отношения к структурным

неопределенностям объекта управления. Это позволяет синтезировать сравнительно простую систему управления для объекта с неизвестным динамическим порядком.

Работа проводилась при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)), гранта РФФИ (16-08-00282, 16-08-00686), гранта МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и гранта Правительства РФ (074-U01).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мирошник, И.В.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И.В. Мирошник, В.О. Никифоров, А.Л. Фрадков СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
2. **Фуртат, И.Б.** Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2009. - №10. - С. 2–7.
3. **Bresch-Pietri D., Chauvin J., Petit N.** Adaptive Backstepping for Uncertain Systems With Time-Delay On-Line Update Laws // Proc. 2011 American Control Conference, San Fransisco, CA, 2011. P. 4890–4897.
4. **Chen W.S., Jiao L.C., Wu J.S.** Decentralized backstepping output-feedback control for stochastic interconnected systems with time-varying delays using neural networks // Neural Computing & Applications. 2012. V. 21. N 6. P. 1375–1390.
5. **Freeman R.A., Kokotović P.V.** Design of ‘softer’ robust nonlinear control laws // Automatica. 1993. V. 29. P. 1435–1437.
6. **Furtat I.B., Tupichin E.A**. Control of Nonlinear Plant Based on Modified Robust Backstepping Algorithm // Proc. of the 2014 IEEE International Conference on Control Applications (CCA), Part of the 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, October 8-10, 2014, Antibes, France. P. 941–946.
7. **Hoagg J.B., Bernstein D.S.** Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 2007. V. 21. N 1. P. 49–75.
8. **Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S.** Systematic design of adaptive controllers for feedback linearezable systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1991. V. 36. P. 1241–1253.
9. **Khalil H.K.** Nonlinear systems // NJ: Prentice Hall. 2002.
10. **Kokotovic P.V.** The joy of feedback: nonlinear and adaptive // IEEE Control Systems Magazine. 1992. V. 12. N 3. P. 7–17.
11. **Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V**. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems // IEEE Trans. On Automatic Control. 1994. V. 39. N 4. P. 738–751.
12. **Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V**. Passivity and parametric robustness of new class of adaptive systems // Automatica. 1994. V. 30. P. 1703–1716.
13. **Nikiforov V.O**. Modified adaptive controllers for linear plants with improved parametric robustness and transient performance // Proc. 4th European Control Conf., Brussels, Belgium. 1997.
14. **Tao G., Ioannou P.A.** Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree // IEEE Trans. On Automatic Control. 1993. V. 38. N 6. P. 976–982.
15. **Tong S.C., Li Y.M., Zhang H.G.** Adaptive Neural Network Decentralized Backstepping Output-Feedback Control for Nonlinear Large-Scale Systems with Time Delays // IEEE Trans. on Neural Networks. 2011. V. 22. N 7. P. 1073–1086.
16. **Zheng Y., Yang Y.** Adaptive output feedback control for class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs // Adaptive control and signal processing. 2007. V. 21. N 1. P. 77–89.
17. **Zhou J**. Decentralized adaptive backstepping stabilization of interconnected systems with input time delays in dynamic interactions // Int J Adaptive Control and Signal Processing. 2012. V. 26. N 4. P. 285–301.