Introdução às Singularidades via Teoria das Catástrofes

Curso de Verão 2025 - Aula II

Inácio Rabelo

rabeloinacio@usp.br

16/01/2024

Conteúdo

Recapitulando

Condições Técnicas

Deformações

Teorema de Thom

Exercícios

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

- Seja ϕ um germe de difeomorfismo tal que $f = f \circ \phi$ em um aberto da origem.
- Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_i} \right).$$

Corank

Proposição
Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ *são tais que* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

- Seja ϕ um germe de difeomorfismo tal que $f = f \circ \phi$ em um aberto da origem.
- Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_i} \right).$$

- Portanto, $H_f = H_g \cdot J_\phi + \nabla(g) \cdot M$.
- J_ϕ - matriz Jacobiana de ϕ, $\nabla(g)$ - gradiente de g e M - matriz que depende das derivadas parciais de ordem maior que 2 das funções coordenadas de ϕ.
- $H_f(0) = H_g(0) \cdot J_\phi(0)$ e $J_\phi(0)$ é invertível.

Dois Exemplos

Exemplo

- Sejam $f = x^2 + y^2$ e $g = (x^2 + y^2)^k$, onde $k \geq 2$.
- Um cálculo direto mostra que $\operatorname{corank}(f) = 0$ e $\operatorname{corank}(g) = 2$.
- Pela propriedade anterior, $f \not\sim_{\mathcal{R}} g$.
- Por outro lado, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{R}^2$.

Dois Exemplos

Exemplo

- Sejam $f = x^2 + y^2$ e $g = (x^2 + y^2)^k$, onde $k \geq 2$.
- Um cálculo direto mostra que $\operatorname{corank}(f) = 0$ e $\operatorname{corank}(g) = 2$.
- Pela propriedade anterior, $f \not\sim_{\mathcal{R}} g$.
- Por outro lado, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo

- Sejam $f = x^2 - y^2$ e $g = x^4 - y^4$.
- Um cálculo direto mostra que $\operatorname{corank}(f) = 0$ e $\operatorname{corank}(g) = 2$.
- Pela propriedade anterior, $f \not\sim_{\mathcal{R}} g$.
- Por outro lado, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{(x, \pm x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Resumo

- **Fenômenos**: Contínuos e Discontínuos descritos por potenciais.
- **Princípio**: Hipótese de otimizar tal potencial.
- **Objetivo**: Encontrar formas normais locais para um estudo qualitativo.

Resumo

- **Fenômenos**: Contínuos e Discontínuos descritos por potenciais.
- **Princípio**: Hipótese de otimizar tal potencial.
- **Objetivo**: Encontrar formas normais locais para um estudo qualitativo.
- **Motivação**: Teorema da Função Inversa e formas locais de imersões e submersões.
- **Ferramentas**: Noção de germes e ação do grupo $\mathcal{R}$ de mudanças diferenciáveis de coordenadas.
- **Condições técnicas**: Estabilidade estrutural e princípios de Maxwell e do Retardamento.

Formas Locais I

Teorema (Função Inversa)
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação diferenciável em um ponto* $p \in U$. *Se* $\det(J_F(p)) \neq 0$, *então existe um aberto* $\widetilde{U} \subset U$ *contendo* p *e um aberto* W *contendo* $F(p)$ *tal que* $F : \widetilde{U} \longrightarrow W$ *é um difeomorfismo.*

Formas Locais I

Teorema (Função Inversa)
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em um ponto $p \in U$. Se $\det(J_F(p)) \neq 0$, então existe um aberto $\widetilde{U} \subset U$ contendo p e um aberto W contendo $F(p)$ tal que $F : \widetilde{U} \longrightarrow W$ é um difeomorfismo.

Definição
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é um aberto.

1. *O rank de F em um ponto $p \in U$, denotado por $\operatorname{rank}_p F$ é o rank da aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*

2. *Se $m = 1$, o corank de f em p, denotado por $\operatorname{corank}_p(f)$ é o coposto da matriz Hessiana $H_f(p)$.*

Formas Locais II

Definição
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação suave, onde* U *é um aberto.*

1. *Se* $n \geq m$ *e* $\operatorname{rank}_p(dF) = m$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma submersão.*

2. *Se* $n \leq m$ *e* $\operatorname{rank}_p(dF) = n$ *para todo* $p \in U$*, então* F *é chamada uma imersão.*

3. *Um ponto* $p \in U$ *é um ponto crítico, também chamado de ponto singular, se* $\operatorname{rank}_p(dF)$ *não é máximo.*

Corolário (Forma Local de Imersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Corolário (Forma Local de Imersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Corolário (Forma Local de Submersões)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma submersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla f$.*

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla f$.*

1. Identificar os parâmetros do sistema.

2. Identificar as relações entre os parâmetros.

3. Identificar o funcional potencial e o significado físico de suas soluções estacionárias.

Fenômenos Contínuos e Discontínuos

Definição
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla f$.*

1. Identificar os parâmetros do sistema.

2. Identificar as relações entre os parâmetros.

3. Identificar o funcional potencial e o significado físico de suas soluções estacionárias.

Definição
Seja $\mathcal{S}$ um sistema de estados de equilíbrio determinado por um funcional potencial $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto. Se $\det(H_V(p)) = 0$ para algum $p \in U$, então dizemos que $\mathcal{S}$ é discontínuo em p.

Objetivos

Dado um sistema $\mathcal{S}$ definido como estados de equilíbrio de um germe de funcional potencial V, encontrar uma forma local para V, também chamada de forma normal, de maneira que o estudo qualitativo de $\mathcal{S}$ possa ser simplificado.

Conteúdo

Recapitulando

Condições Técnicas

Deformações

Teorema de Thom

Exercícios

Estabilidade Estrutural I

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações significativas ou qualitativas dos resultados.

Estabilidade Estrutural I

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações significativas ou qualitativas dos resultados.

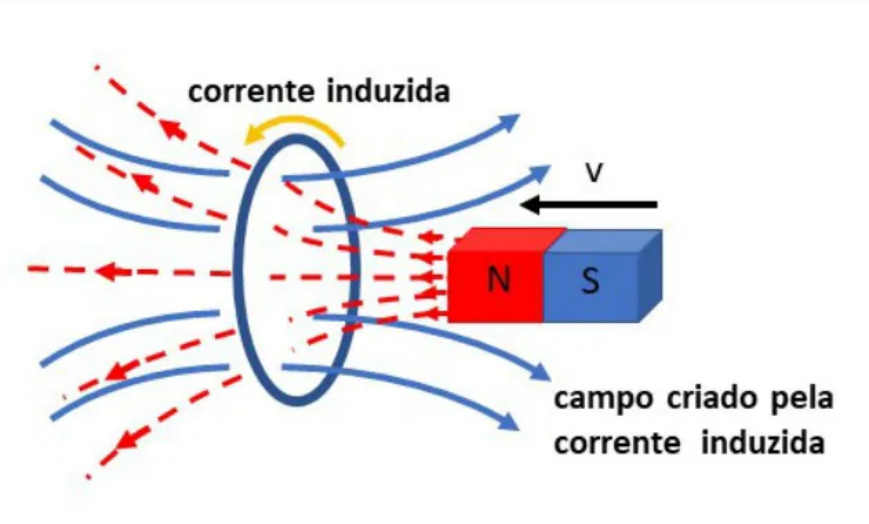


Figura 1: Lei de Faraday: Indução Eletromagnética

Estabilidade Estrutural I

- Confiabilidade de um experimento: repetições e poucas perturbações não provocam alterações significativas ou qualitativas dos resultados.

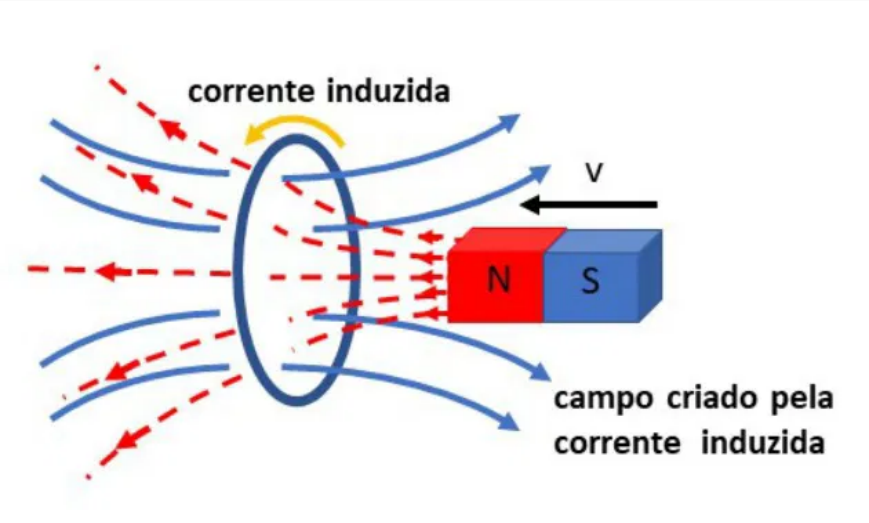


Figura 1: Lei de Faraday: Indução Eletromagnética

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial, onde U é um aberto. Dizemos que f é estruturalmente estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena por uma função suave $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, então $f + g$ também é equivalente a f.

Estabilidade Estrutural II

Pontos de Morse

- Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um ponto $p \in U$ como uma singularidade de Morse, então $\det\left(H_f(p)\right) \neq 0$.
- Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\longmapsto C^\infty(U) \longmapsto \mathbb{R} \\ g &\longmapsto f+g \longmapsto \det\left(H_{f+g}(p)\right) \end{aligned}$$

- Conclusão: Perturbações pequenas geram singularidades de Morse.

Estabilidade Estrutural II

Pontos de Morse

- Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um ponto $p \in U$ como uma singularidade de Morse, então $\det(H_f(p)) \neq 0$.
- Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\longmapsto C^\infty(U) \longmapsto \mathbb{R} \\ g &\longmapsto f + g \longmapsto \det(H_{f+g}(p)) \end{aligned}$$

- Conclusão: Perturbações pequenas geram singularidades de Morse.

Exemplo

- Seja $f(x) = x^3$ e considere $g(x) = \epsilon x$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ é pequeno.
- Se $\epsilon > 0$, então $f + g$ não possui pontos críticos.
- Se $\epsilon < 0$, possui dois pontos críticos.
- De acordo com a definição anterior, f não é estruturalmente estável.

Reformulando

Somente funções de Morse seriam estruturalmente estáveis!

Reformulando

Somente funções de Morse seriam estruturalmente estáveis!

Formulação da Análise

As funções potenciais V serão descritas por meio de variáveis de estados x e variáveis de controle u e, portanto, terão como domínio um subespaço em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. A estabilidade estrutural se traduz para a hipótese de que todos os possíveis estados do sistema, incluindo perturbações suficientemente controladas, são descritos qualitativamente pelos controles u através do potencial V.

Princípios de Maxwell e do Retardamento

Maxwell
Seja $\mathcal{S}$ um sistema governado por um potencial V. Seja $p \in U$ um estado de equilíbrio, isto é, $\nabla V(p) = 0$. Então, o estado de equilíbrio atingido pelo sistema é sempre aquele que otimiza o potencial V.

Princípios de Maxwell e do Retardamento

Maxwell
Seja $\mathcal{S}$ um sistema governado por um potencial V. Seja $p \in U$ um estado de equilíbrio, isto é, $\nabla V(p) = 0$. Então, o estado de equilíbrio atingido pelo sistema é sempre aquele que otimiza o potencial V.

- O estado de equilíbrio escolhido é sempre aquele em que há a otimização da energia potencial.
- Em sistemas de estados de equilíbrio que são contínuos, isso é imediato.
- Nos casos discontínuos, poderá haver mais de uma possibilidade de valor para o potencial.

Princípios de Maxwell e do Retardamento

Maxwell

Seja $\mathcal{S}$ um sistema governado por um potencial V. Seja $p \in U$ um estado de equilíbrio, isto é, $\nabla V(p) = 0$. Então, o estado de equilíbrio atingido pelo sistema é sempre aquele que otimiza o potencial V.

- O estado de equilíbrio escolhido é sempre aquele em que há a otimização da energia potencial.
- Em sistemas de estados de equilíbrio que são contínuos, isso é imediato.
- Nos casos discontínuos, poderá haver mais de uma possibilidade de valor para o potencial.

Retardamento

Um estado de equilíbrio de tipo Morse tende continuamente, de acordo com os parâmetros de controle, para um estado de tipo não Morse. Em tais estados o comportamento qualitativo do sistema sofre uma alteração.

Conteúdo

Recapitulando

Condições Técnicas

Deformações

Teorema de Thom

Exercícios

Definições I

Definição
Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe suave tal que 0 é um ponto crítico.

1. *Uma deformação a k-parâmetros de f é um germe*

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto F(x, u)$$

   tal que $F(x, 0) = f(x)$.

2. *Duas deformações F e G a k-parâmetros são equivalentes se existe um germe de difeomorfismo*

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto (\phi_u(x), u)$$

   tal que $\Phi(x, 0) = (x, 0)$ e $F = G \circ \Phi$.

3. *Uma deformação a k-parâmetros F é chamada de trivial se é equivalente à deformação constante $G(x, u) = f(x)$.*

4. *O germe f é chamado de (estruturalmente) estável quando todas as suas deformações são triviais.*

Definições II

Definição

1. *Seja* $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *um germe de função potencial nas variáveis* $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. *Dizemos que o espaço* $\mathbb{R}^n$ *é o espaço de estados e que* $\mathbb{R}^k$ *o espaço de controle.*

2. *O conjunto catástrofe, também chamado de estados de equilíbrio, é*

$$C_V = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) : \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n \right\}.$$

3. *O conjunto de bifurcação, também chamado de estados de equilíbrio instáveis, é*

$$B_V = \left\{ u \in (\mathbb{R}^k, 0) : \exists \, (x, u) \in C_F \text{ tal que } \operatorname{rank}_{(x,u)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) < n \right\}.$$

Observações

- Deformações permitem estudar propriedades de germes próximos de pontos críticos.
- Por outro lado, gostaríamos de entender todos os possíveis fenômenos relativos ao germe e próximos da singularidade.
- O conceito de deformação versal nos permite concluir esse objetivo ao capturar todas as possíveis singularidades em que uma dada singularidade pode ser deformada ou perturbada.
- Essa será a formulação matemática para o conceito de estabilidade estrutural.

Exemplo

- Seja $f(x) = x$ e considere as seguintes deformações:
  - $F(x, u) = f(x) = x$
  - $G(x, u) = (x + ux^2, u)$, onde $u \in \mathbb{R}$.

- A aplicação $\Phi(x, u) = (x + ux^2, u)$ é um germe de difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $F \circ \Phi = G$ e, portanto, G é trivial.

- Para qualquer outra deformação $H(x, u)$, onde $u \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$H(x, u) = u_1 h_1(x, u) + \cdots + u_n h_n(x, u) + x,$$

  onde $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

- Note que $\Psi(x, u) = (H(x, u), u)$ é um germe de difeomorfismo tal que $H = F \circ \Phi$.

- Conclui-se que f é estável.

Mudando o espaço de parâmetros

Definição

1. *Seja* $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação de um germe* f. *Seja* $h : (\mathbb{R}^a, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ *um germe de aplicação. O pullback de* F *por* h *é a deformação*

$$h^*F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, v) \longmapsto F(x, h(v))$$

   Essa deformação é também chamada de mudança de parâmetros da deformação.

2. *Uma deformação* F *a* k*-parâmetros é chamada versal se para qualquer deformação* G *a* a*-parâmetros existe uma mudança* h *de parâmetros tal que* h^*F *e* G *são equivalentes.*

3. *Uma deformação versal* F *a* k*-parâmetros é chamada miniversal se não existe uma deformação versal a um número de parâmetros menor que* k.

4. *Sejam* F *e* G *duas deformações a* k*-parâmetros. Elas são chamadas isomorfas se existe uma mudança de parâmetros* $h : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, *que é também um difeomorfismo, tal que* G *é equivalente a* h^*F.

Conteúdo

Recapitulando

Condições Técnicas

Deformações

Teorema de Thom

Exercícios

Lema de Decomposição

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave.
- Se $p \in U$ é um ponto regular, então f é equivalente a uma projeção.
- Se $p \in U$ é um ponto crítico não degenerado, f é equivalente a uma forma quadrática.
- E sobre formas normais para singularidades mais degeneradas?

Lema de Decomposição

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave.
- Se $p \in U$ é um ponto regular, então f é equivalente a uma projeção.
- Se $p \in U$ é um ponto crítico não degenerado, f é equivalente a uma forma quadrática.
- E sobre formas normais para singularidades mais degeneradas?

Lema (Decomposição)
Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe tal que 0 é um ponto crítico e $\operatorname{corank}(f) = c$. Então, f é equivalente a um germe da forma

$$f \sim_{\mathcal{R}} g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

onde $0 \in \mathbb{R}^n$ é um um ponto crítico degenerado de g.

Conclusões

1. *O estudo de um germe de função pode ser reduzido a um número menor de variáveis.*

Conclusões

1. *O estudo de um germe de função pode ser reduzido a um número menor de variáveis.*
2. *O comportamento de um sistema $\mathcal{S}$ descrito por um potencial V nas variáveis de estado x e de controle u pode ser determinado por um número menor de variáveis de controle.*

Conclusões

1. *O estudo de um germe de função pode ser reduzido a um número menor de variáveis.*
2. *O comportamento de um sistema $\mathcal{S}$ descrito por um potencial V nas variáveis de estado x e de controle u pode ser determinado por um número menor de variáveis de controle.*
3. *O comportamento de um sistema discontínuo e estruturalmente estável $\mathcal{S}$ descrito por um potencial V nas variáveis de estado x e de controle u é completamente determinado por um número (possivelmente menor) mínimo de parâmetros.*

Conclusões

1. *O estudo de um germe de função pode ser reduzido a um número menor de variáveis.*
2. *O comportamento de um sistema $\mathcal{S}$ descrito por um potencial V nas variáveis de estado x e de controle u pode ser determinado por um número menor de variáveis de controle.*
3. *O comportamento de um sistema discontínuo e estruturalmente estável $\mathcal{S}$ descrito por um potencial V nas variáveis de estado x e de controle u é completamente determinado por um número (possivelmente menor) mínimo de parâmetros.*

Exemplo

- Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$ e considere as deformações $F = x^2 + y^3 + u_1 y + u_2$ e $G = x^2 + y^3 - 3v^2 y + 2v^3$.
- Se $h(v) = (-3v^2, 2v^3)$, então $G = h^* F$.
- Portanto, F e G são equivalentes a menos de uma mudança de parâmetros.

Nova Equivalência

Definição

Duas deformações F, G a k-parâmetros são $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$G = F \circ \Phi(x, u) + c(u).$$

Nova Equivalência

Definição
Duas deformações F, G a k-parâmetros são $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$G = F \circ \Phi(x, u) + c(u).$$

- A equivalência acima permite translações.
- Também, o germe de difeomorfismo não necessariamente é um desdobramento da identidade.

Nova Equivalência

Definição
Duas deformações F, G a k-parâmetros são $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$G = F \circ \Phi(x, u) + c(u).$$

- A equivalência acima permite translações.
- Também, o germe de difeomorfismo não necessariamente é um desdobramento da identidade.
- Comportamentos discontínuos podem ser gerados somente por pontos degenerados.
- Assim, a omissão das formas quadráticas não representa uma perda qualitativa para a teoria.

Lema de Decomposição: Deformações

Lema ($\mathcal{R}$-equivalência)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação tal que a matriz Hessiana* $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ *com relação à variável* x *tem corank igual a* $m \neq 0$ *em um ponto* $(0, u_0)$. *Então,* V *é equivalente a uma deformação da forma*

$$V \sim_{\mathcal{R}} G\left(y_1(x,u), \ldots, y_m(x,u), u\right) \pm y_{m+1}^2 \pm \cdots \pm y_n^2,$$

onde $0 \in \mathbb{R}^n$ *é um um ponto crítico degenerado de* $G(x, u_0)$.

Lema de Decomposição: Deformações

Lema ($\mathcal{R}$-equivalência)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação tal que a matriz Hessiana* $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ *com relação à variável* x *tem corank igual a* $m \neq 0$ *em um ponto* $(0, u_0)$. *Então,* V *é equivalente a uma deformação da forma*

$$V \sim_{\mathcal{R}} G\left(y_1(x,u), \ldots, y_m(x,u), u\right) \pm y_{m+1}^2 \pm \cdots \pm y_n^2,$$

onde $0 \in \mathbb{R}^n$ *é um um ponto crítico degenerado de* $G(x, u_0)$.

Lema ($\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$-equivalência)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação tal que a matriz Hessiana* $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ *com relação à variável* x *tem corank igual a* $m \neq 0$ *em um ponto* $(0, u_0)$. *Então,* V *é* $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$*-equivalente a uma deformação da forma*

$$V \sim_{\mathcal{R}} G\left(y_1(x,u), \ldots, y_m(x,u), u\right),$$

onde $0 \in \mathbb{R}^n$ *é um um ponto crítico degenerado de* $G(x, u_0)$.

O Enunciado

Teorema (Catástrofes de Thom)
Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma deformação versal tal que* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Então,* V *é* $\mathcal{P}-\mathcal{R}^+$*-equivalente a uma, e somente uma, das deformações abaixo:*

Tipo	***Singularidade***	***Deformação Versal***	***Nome***
A_2	x^3	$x^3 + u_1x$	*Ponto*
A_3	x^4	$\pm x^4 + u_2x^2 + u_1x$	*Cúspide*
A_4	x^5	$x^5 + u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Rabo de Andorinha*
A_5	x^6	$\pm x^6 + u_4x^4u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	*Borboleta*
D_4^-	$x^3 + y^3$	$x^3 - xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2y + u_1x$	*Hiperbólica Umbílica*
D_4^+	$x^3 + 3xy^2$	$x^3 + y^3 + u_3xy + u_2y + u_2x$	*Elíptica Umbílica*
D_5	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + u_4y^2 + u_3x^2 + u_2y + u_1x$	*Parabólica Umbílica*

Observações

- Com relação às aplicações do teorema, as duas hipóteses se traduzem como:
- Número de parâmetros de controle do sistema é limitado a 4;
- Estabilidade estrutural.
- No que segue, estudamos em detalhes a geometria da dobra e da cúspide.

Dobra I

- A catástrofe mais simples consiste na deformação versal $V(x, u) = x^3 + ux$ da singularidade x^3.
- Como há uma variável de estado e um controle, a superfície de equilíbrio é na verdade uma curva.

Dobra I

- A catástrofe mais simples consiste na deformação versal $V(x,u) = x^3 + ux$ da singularidade x^3.

- Como há uma variável de estado e um controle, a superfície de equilíbrio é na verdade uma curva.

- Os estados críticos degenerados das singularidades geradas por V são determinados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} & = 3x^2 + u = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x^2} & = 6x = 0 \end{cases}$$

- Portanto, a superfície de equilíbrio consiste de uma parábola e o conjunto de bifurcação, contido no eixo u, somente da origem.

Dobra II

- Quando $u > 0$, $V(x, u)$ não possui pontos críticos e o regime de estados é vazio.
- Quando $u < 0$, há um máximo e um mínimo, ambos estáveis.
- A curva de equilíbrio se dobra sobre o eixo de controle u.

Dobra II

- Quando $u > 0$, $V(x, u)$ não possui pontos críticos e o regime de estados é vazio.

- Quando $u < 0$, há um máximo e um mínimo, ambos estáveis.

- A curva de equilíbrio se dobra sobre o eixo de controle u.

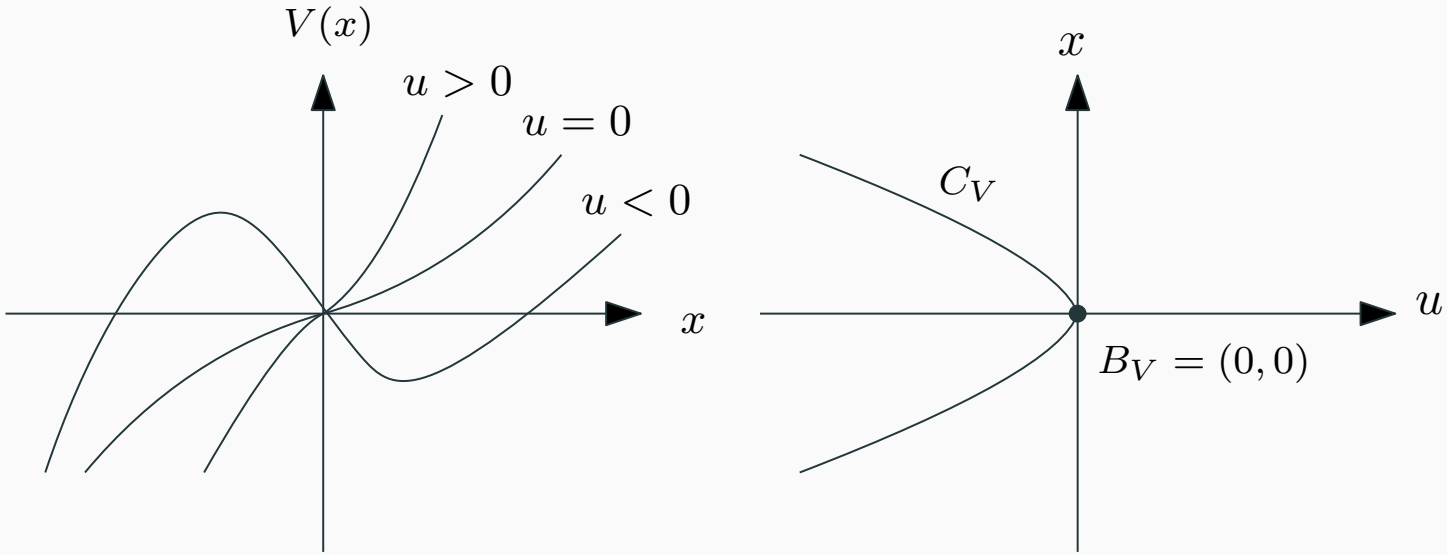


Figura 2: Singularidades geradas e curva de equilíbrio

Cúspide I

- A cúspide consiste na deformação $V(x,u,v) = x^4 + ux^2 + vx$ da singularidade x^4.
- A superfície de equilíbrio está contida em $\mathbb{R}^3$ e por isso seu estudo é mais interessante e geométrico.
- A superfície de equilíbrio consiste dos pontos $(x,u,v) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4x^3 + 2ux + v = 0.$$

- Os pontos críticos degenerados (x,u,v) são aqueles em que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 12x^2 + 2u = 0.$$

Cúspide II

- O conjunto de bifurcação no plano uv é determinado por condições sobre (u, v) para que exista x_0 tal que (x_0, u, v) satisfaça ambas as equações.
- Da segunda equação, obtemos $u = -6x_0^2$.
- Substituindo isso na primeira, encontramos $v = -8x_0^3$.

Cúspide II

- O conjunto de bifurcação no plano uv é determinado por condições sobre (u, v) para que exista x_0 tal que (x_0, u, v) satisfaça ambas as equações.
- Da segunda equação, obtemos $u = -6x_0^2$.
- Substituindo isso na primeira, encontramos $v = -8x_0^3$.
- Para descrever esse conjunto somente em termos de u e v, note que $u^3 = \kappa v^2$, onde $\kappa = -27/8$.
- Portanto, encontramos que o conjunto é a cúspide determinada por

$$B_V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 8u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

Superfície de Equilíbrio

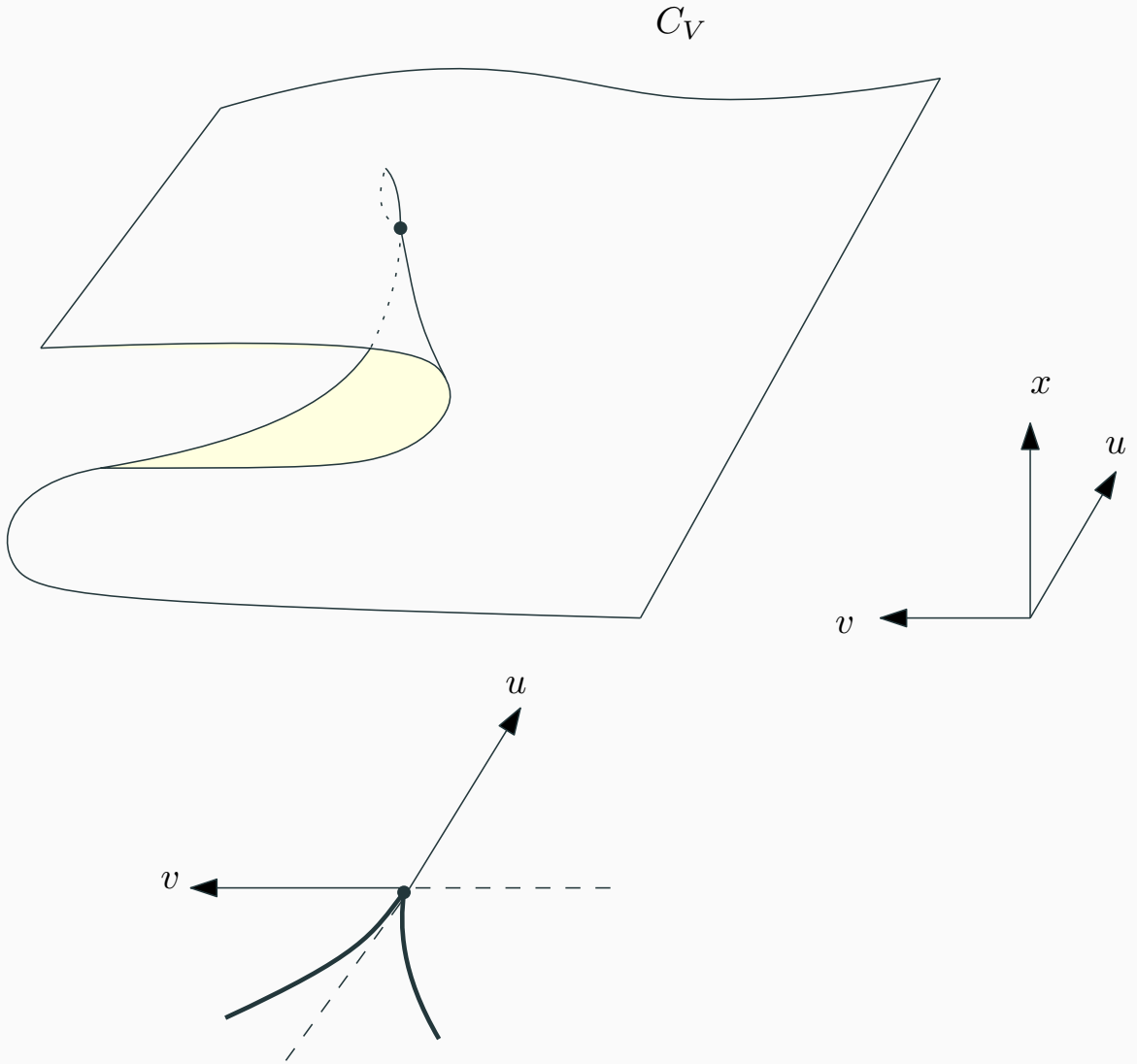


Figura 3: Catástrofe cúspide e seu conjunto de bifurcação

Estados sobre a cúspide I

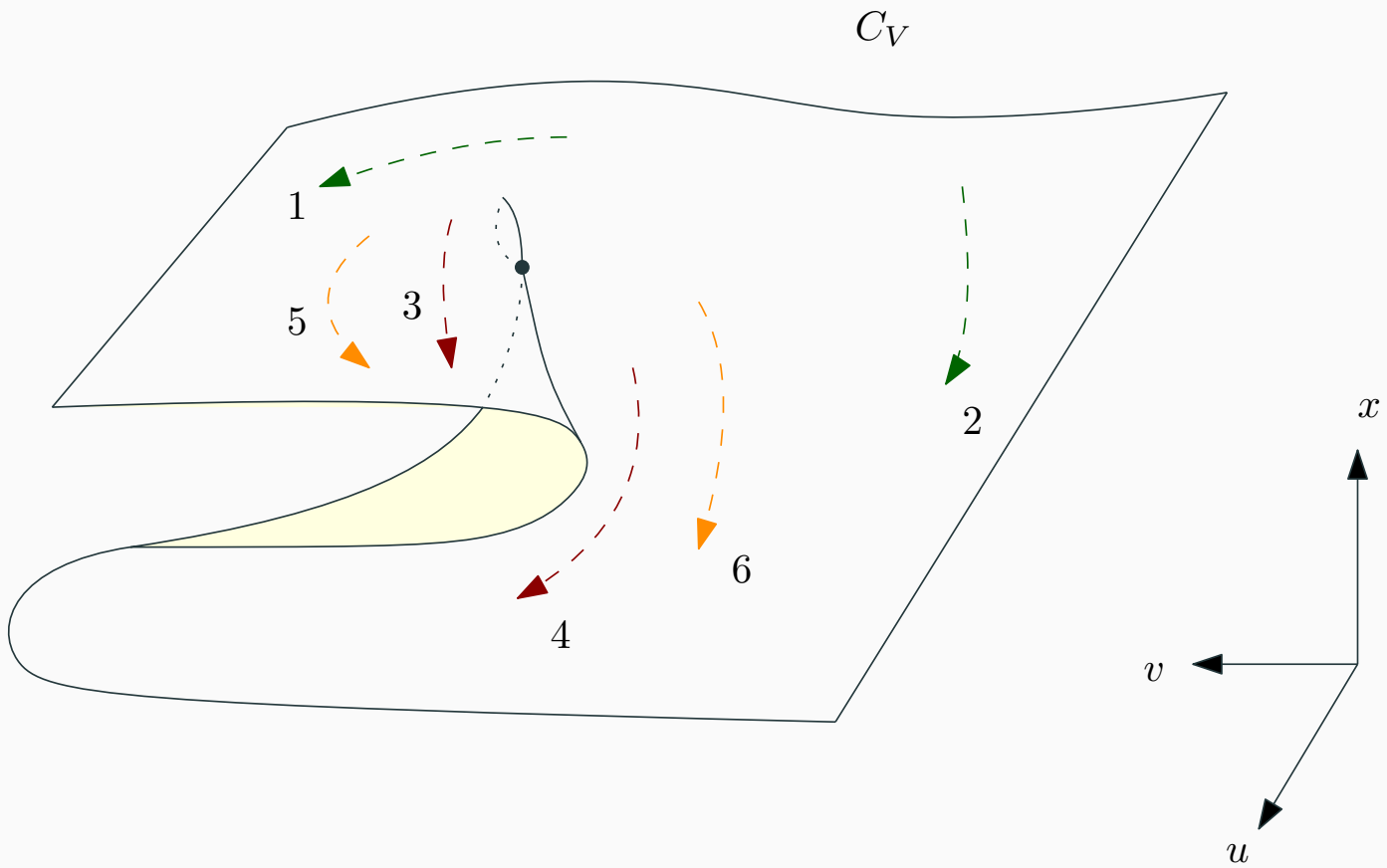


Figura 4: Caminhos sobre a superfície de equilíbrio

Estados sobre a cúspide II

- Os caminhos 1 e 2 em verde representam estados de equilíbrio e o que ocorre quando alteramos significativamente somente um dos parâmetros de controle. Como esperado, isso implica uma alteração (vertical) também na variável de estados, mas sem ocorrência de discontinuidades.

- Os caminhos 3 e 4 em vermelho representam caminhos nos quais há pontos de catástrofes e o que se ocorre quando alteramos significativa e simultaneamente ambos os parâmetros de controle.

- Os caminhos 5 e 6 em laranja representam um comportamento misto de estabilidade e instabilidade, quando discontinuidades ocorrem mais de uma vez.

- Veremos agora a projeção desses caminhos no plano de controle.

Estados sobre a cúspide III

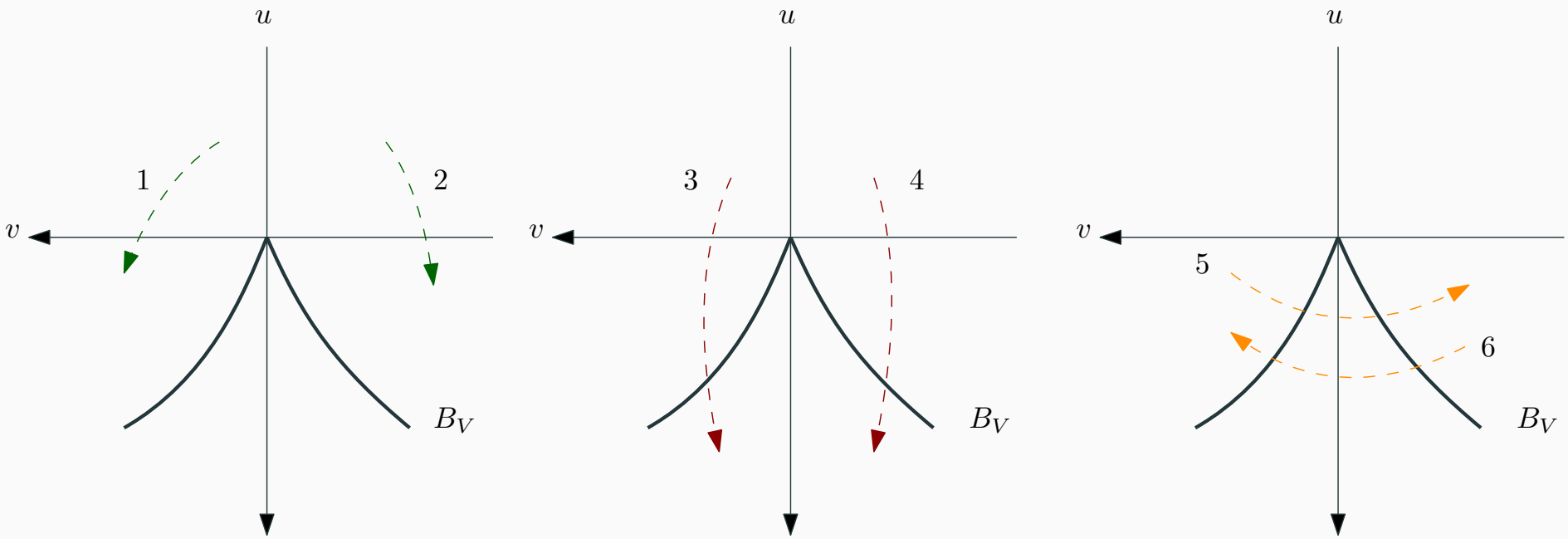


Figura 5: Catástrofe cúspide e seu conjunto de bifurcação

A Dobra e Potenciais na Cúspide

Dobra

- Considere a interseção de C_V com planos transversais ao plano uv.
- A curva obtida se aproxima da curva de equilíbrio da catástrofe dobra.
- Ou seja, deformações versais de x^4 incluem deformações de x^3.

A Dobra e Potenciais na Cúspide

Dobra

- Considere a interseção de C_V com planos transversais ao plano uv.
- A curva obtida se aproxima da curva de equilíbrio da catástrofe dobra.
- Ou seja, deformações versais de x^4 incluem deformações de x^3.

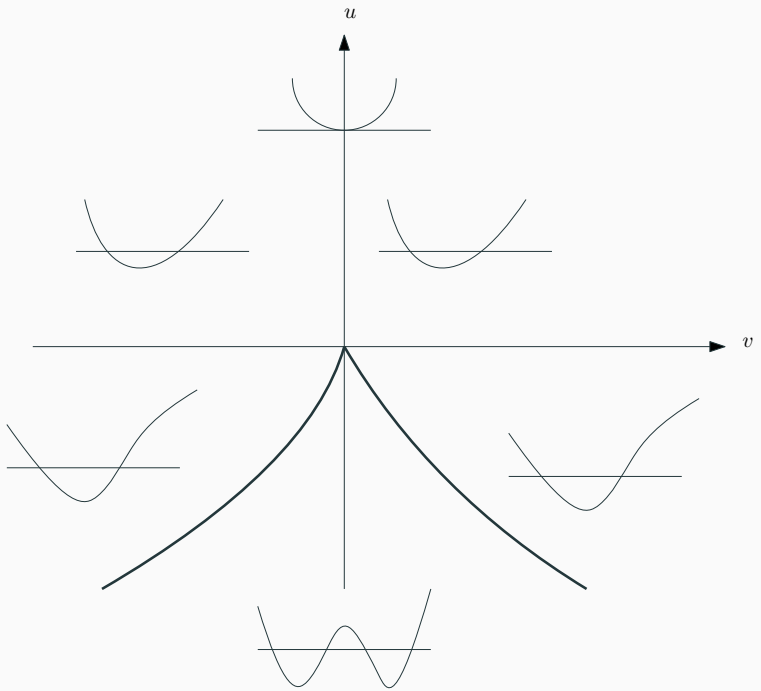


Figura 6: Potencial $V(x)$ para diferentes valores u, v

As 5 Propriedades Fundamentais

1. **Bimodalidade:** É a propriedade caracterizada pelo fato de que existem parâmetros de controle associados a mais de um estado possível. Isso ocorre, por exemplo, na região que é projetada para o interior de B_V. Em outras palavras, a superfície de equilíbrio, como um todo, não pode ser o gráfico de uma função de duas variáveis.

2. **Discontinuidade:** Essa propriedade é justamente representada pelos pontos correspondentes aos pontos de bifurcação, ou simplesmente aos chamados pontos de discontinuidade de C_V. Grosseiramente falando, é quando a superfície se curva de uma maneira abrupta ou repentina e então sua geometria sofre uma alteração qualitativa.

3. **Divergência:** Dois pontos alocados em porções distintas de C_V podem ser conectados de distintas maneiras, em particular, passando ou não por discontinuidades. Ou seja, a transição entre estados pode manifestar comportamento qualitativamente distintos.

4. **Histerese:** Na superfície de equilíbrio, a discontinuidade da parte superior em direção a inferior não ocorre para as mesmas variáveis de estado. Em outras palavras, catástrofes ocorrem em estados distintos.

5. **Inacessibilidade:** A região limitada inferiomente pela porção amarela da superfície de equilíbrio é inacessível, ou seja, representa estados que nunca são realizáveis ou verificados.

Demais Catástrofes

Observação

As demais catástrofes possuem estados de equilíbrio em dimensões mais altas e para estas considera-se os conjuntos de bifurcações e projeções em subespaços de controle.

Demais Catástrofes

Observação

As demais catástrofes possuem estados de equilíbrio em dimensões mais altas e para estas considera-se os conjuntos de bifurcações e projeções em subespaços de controle.

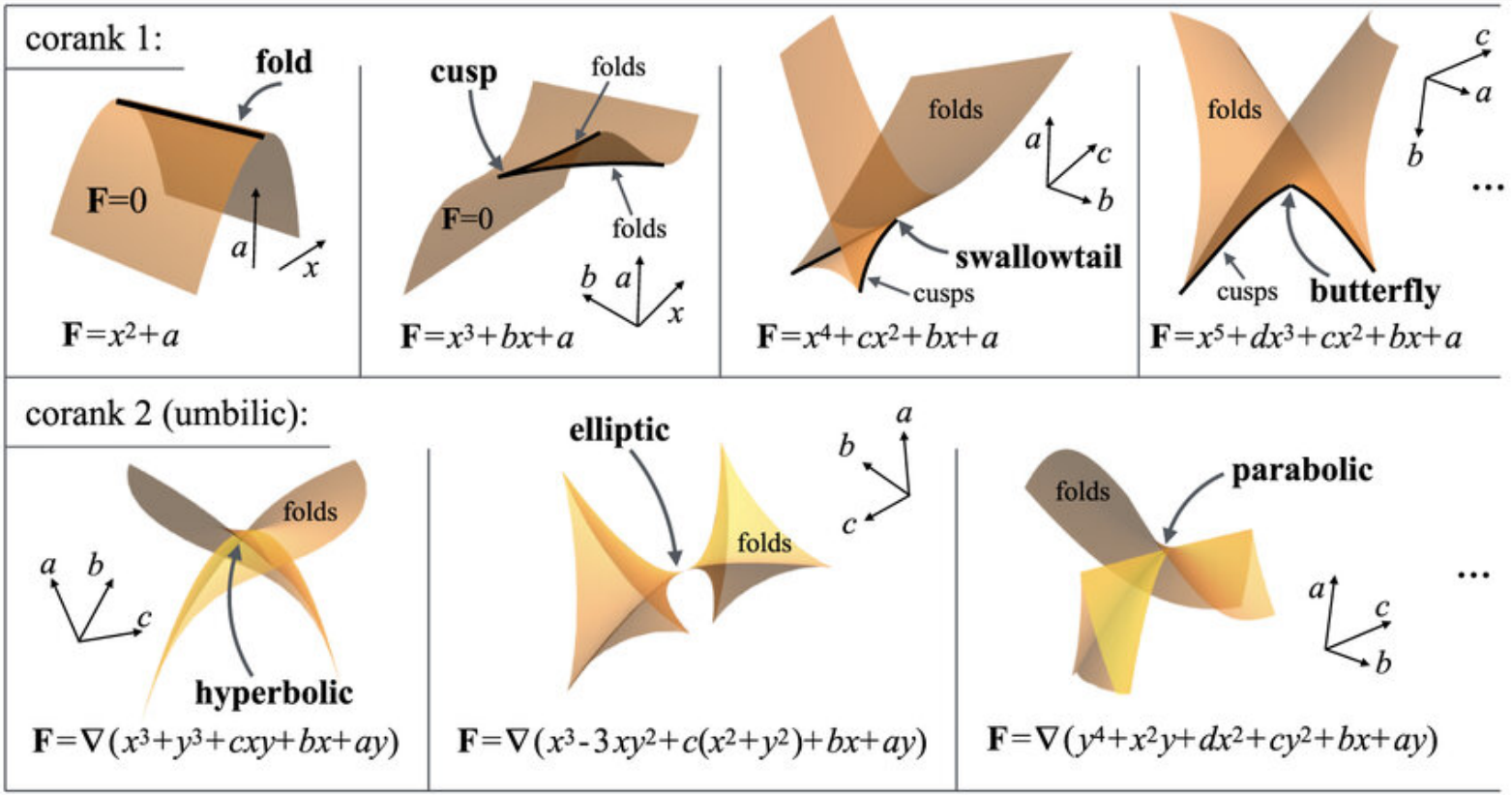


Figura 7: Catástrofes de dimensão mais alta e conjuntos de bifurcação

Conteúdo

Recapitulando

Condições Técnicas

Deformações

Teorema de Thom

Exercícios

Exercício
Mostre que se duas deformações são equivalentes, então elas são isomorfas.

Exercício
Mostre que se h é um germe de difeomorfismo do espaço de parâmetros e F é uma deformação, então F e h^*F são isomorfas.

Exercício
Se um germe f é estável, então todas suas deformações são versais.

Exercício
Mostre que se duas deformações são equivalentes, então elas são isomorfas.

Exercício
Mostre que se h é um germe de difeomorfismo do espaço de parâmetros e F é uma deformação, então F e h^*F são isomorfas.

Exercício
Se um germe f é estável, então todas suas deformações são versais.

Exercício
Mostre que qualquer deformação versal é isomorfa a deformação constante de uma deformação miniversal.

Exercício
Mostre que qualquer deformação de um germe de função é estável como um germe de função também.