UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO



Notas de Minicurso

Introdução às Singularidades via Teoria de Catástrofes

Inácio Augusto Rabelo Pinto

https://inaciorabelo.owlstown.net

rabeloinacio@usp.br

São Carlos - SP - Brasil

Verão de 2025

Conteúdo

Introdução **1**

1 Prolegômenos e Objetivos **3**
1.1 Extremos de Funções . . . 3
1.2 Potenciais . . . 5
1.3 Formas Locais . . . 9
1.4 Principal Objetivo . . . 10
1.5 Sobre os Fenômenos . . . 12
1.6 Exercícios . . . 14

2 Catástrofes Elementares de Thom **16**
2.1 Lema de Decomposição . . . 16
2.2 Deformações . . . 16
2.3 Teorema de Classificação . . . 18
2.4 Exercícios . . . 22

3 Aplicações **23**
3.1 Cáusticas . . . 23
3.2 Estruturas Elásticas . . . 25
3.3 Termodinâmica . . . 27
3.4 Sistemas Estelares . . . 29
3.5 Ciências Sociais e as Críticas . . . 32

4 Determinação Finita **35**
4.1 Teorema de Arnold . . . 35
4.2 Teorema de Whitney . . . 39
4.3 Exercícios . . . 42

Introdução

Singularities are all over the place. Without singularities, you cannot talk about shapes. When you write a signature, if there is no crossing, no sharp point, it's just a squiggle. It doesn't make a signature. Many phenomena are interesting, or sometimes disastrous, because they have singularities. A singularity might be a crossing or something suddenly changing direction. There are many things like that in the world, and that's why the world is interesting. Otherwise, it would be completely flat. If everything were smooth, then there would be no novels or movies. The world is interesting because of the singularities.

Heisuke Hironaka, ganhador da medalha Fields de 1970.

Singularidade é um conceito ubíquo em Matemática. Seu significado depende muito do contexto envolvido. A primeira tentativa, talvez muito ingênua, seria recorrer ao dicionário Aurélio: Qualidade de singular, único, distinto dos demais; Sem correspondência com outro, são algumas possíveis definições. Abaixo, apresentamos ao menos três contextos nos quais o conceito de singularidade pode aparecer.

Campos de Vetores: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores, onde U é um aberto. Uma singularidade de X é um ponto $p \in U$ tal que $X(p) = 0$. É possível estender o conceito para campos de vetores em uma variedade M qualquer. Associado a uma singularidade, podemos definir o índice de X em um ponto.O principal resultado nessa direção é o Teorema de Poincaré-Hopf, que relaciona a somatória dos índices de um campo vetorial definido em uma variedade compacta e orientável com sua característica de Euler. Para detalhes, veja [8, Chapter 3].

Conjuntos: Em muitos casos obtemos variedades com bicos, ou singularidades. Por exemplo, o cone de duas folhas descrito por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Os principais pontos de vista são, por exemplo, as topologias algébrica e diferencial e também a Geometria Lipschitz dessas variedades. Algumas dessas ferramentas e resultados são, fibrações de Milnor, classes de Chern e Mac-Pherson-Schwartz, feixes perversos e muitos outros. Mais exemplos podem ser vistos na próxima figura, retirada de [8].

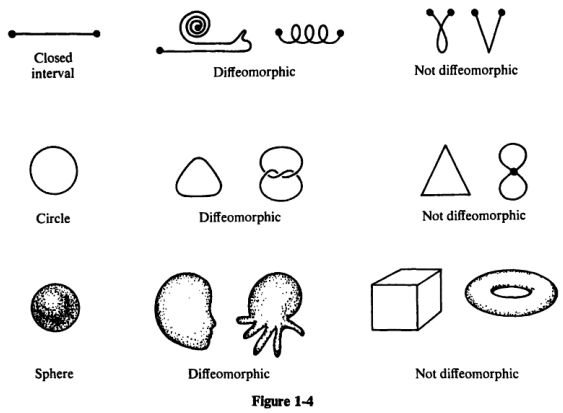


Figura 1: Exemplos de variedades suaves e singulares

Aplicações: Veremos que imersões e submersões são aplicações suaves que possuem, a menos de uma

mudança de coordenadas, formas normais simples. No entanto, a depender do comportamento de sua derivada, determinar resultados análogos pode não ser uma tarefa fácil. Mais especificamente, pontos em que a derivada não tem posto máximo, são chamados de *singularidades*. Determinar formas normais mais simples e propriedades gerais de tais mapas, constitui um dos principais objetivos da teoria de singularidades, como veremos.

Portanto, pode-se concluir que singularidades não são eventos tão raros, fato também observado pela frase acima. Neste minicurso, apresentamos uma introdução à Teoria de Singularidades de Funções e, como motivação, também algumas aplicações à Física à partir do foco e a formulação do programa da Teoria de Catástrofes. Mais do que aspectos quantitativos, a teoria formulada por René Thom, medalhista Fields de 1958, visa uma descrição *qualitativa* dos fenômenos físicos. Na década de 1970, houve um grande interesse em diversas áreas das ciências, mas após fortes críticas, os ânimos se arrefeceram, enquanto a teoria de Singularidades se desenvolvia e bifurcava em distintos caminhos.

O minicurso está dividido em 4 capítulos, correspondentes a 4 aulas. No primeiro capítulo, recapitulamos alguns resultados do Cálculo Vetorial e introduzimos os principais objetivos e objetos. No segundo capítulo, estudamos as deformações versais, que caracterizam matematicamente fenômenos físicos estruturalmente estáveis, e enunciamos o Teorema de Classificação de Thom. Na terceira parte, apresentamos algumas possíveis aplicações e relações com alguns fenômenos da Física. A fenômenos discontínuos, associamos as catástrofes de Thom, que os descrevem qualitativamente, mas com algumas limitações também. Por fim, na última parte apresentamos o importante conceito de determinação finita e resultados de classificação de singularidades que remontam às formas locais que recapitulamos na primeira aula.

Aula 1

Prolegômenos e Objetivos

> *...the underlying forces in nature can be described by smooth surfaces of equilibrium, it is when the equilibrium breaks down that catastrophes occur. The problem for catastrophe theory is therefore to describe the shapes of all possible equilibrium surfaces. Thom has solved this problem in terms of a few archetypal forms, which he calls elementary catastrophes. The proof of Thom's theorem is a difficult one, but the results of the proof are relatively easy to comprehend. The elementary catastrophes themselves can be understood and applied to problems in the sciences without reference to the proof.*
>
> C. Zeeman, Scientific American, 1976.

Neste capítulo, revemos alguns conceitos importantes do Cálculo de várias variáveis e damos os primeiros passos para a formulação matemática de fenômenos físicos e os objetivos do minicurso. Mais especificamente, introduzimos a noção de funções, ou funcionais, potenciais, exemplos de fenômenos contínuos e discontínuos e estabelecemos duas hipótesess técnicas sobre os nossos modelos. As principais referências são [2, Chapter 9] e o clássico [18].

1.1 Extremos de Funções

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos suas *funções coordenadas* por $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Relembramos as seguintes definições:

Definição 1.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto $p \in U$ um ponto.*

1. *A k-ésima derivada parcial de f em um ponto p é o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}$$

   quando tal limite existe.

2. *A derivada direcional de f em p com relação a um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

   quando tal limite existe.

3. *A função f é diferenciável em p se todas suas k-ésimas derivadas parciais em p existem e para todo vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $p + v \in U$ a seguinte igualdade se verifica:*

$$f(p + v) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)v_n + r(v),$$

   onde $r(v)$ é uma função tal que $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$.

4. *Uma aplicação $F = (f_1, \ldots, f_m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p se todas suas funções coordenadas são diferenciáveis em p.*

Observação 1.2. Se f é diferenciável em um ponto $p \in U$, então as derivadas parciais existem e são contínuas. Mas a recíproca não é verdade.

Das definições acima segue que a derivada de uma aplicação $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em um ponto $p \in U$ é uma transformação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cuja matriz, chamada *matriz Jacobiana*, é

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Em teoria de singularidades, é comum dizermos que o domínio da aplicação é o *espaço fonte* e o contradomínio é o *espaço meta*. Além disso, se $m = 1$, então nos referimos a f como uma função. Revisitamos agora a teoria de máximos e mínimos de funções de várias variáveis.

Definição 1.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $p \in U$ é dito ser um ponto crítico se $\nabla f(p) = 0$, equivalentemente, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Definição 1.4.

1. *Um ponto $p \in U$ é dito ser um máximo local (respectivamente, mínimo) se $f(p) > f(x)$ (respectivamente, $f(p) < f(x)$) para todo x em um bola suficientemente pequena em torno de p.*

2. *Um ponto crítico $p \in U$ é dito ser um ponto de sela se para toda bola aberta centrada em p existem pontos no domínio maiores e menores que $f(p)$.*

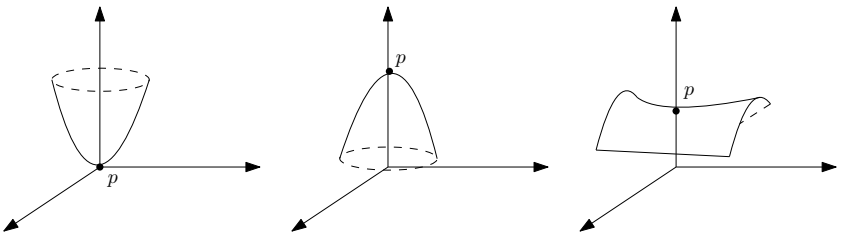


Figura 1.1: Três tipos de pontos críticos para funções de duas variáveis

Teorema 1.5. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, onde U é um aberto. Se $p \in U$ é um ponto de máximo ou mínimo local, então p é um ponto crítico de f.*

Analogamente para o caso de funções de uma variável, o resultado acima mostra que os extremos são encontrados à partir da condição das derivadas parciais serem nulas. Além disso, pela definição de pontos de sela, a recíproca não é verdadeira (veja a Figura 1.1). Associamos a f e a cada ponto $p \in U$ a seguinte matriz, chamada de *Hessiana* e que define uma forma multilinear:

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Observação 1.6. Considere a expansão de Taylor de f em torno de um ponto crítico $p \in U$. Como as derivadas parcias de primeira ordem se anulam, é possível concluir que H_f *aproxima* linearmente a função f em uma tal vizinhança.

Teorema 1.7. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, onde U é um aberto e suponha $p \in U$ um ponto crítico de f.*

1. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são positivos, então p é um mínimo local.*
2. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são negativos, então p é um máximo local.*
3. *Se $n = 2$ e $H_f(p)$ possui somente autovalores negativos ou positivos, p é um ponto de sela.*
4. *Se $\det(H_f(p)) = 0$, o teste é inconclusivo.*

Na próxima seção, veremos como o terceiro caso do Teorema 1.7 está associado a fenômenos discontínuos, cuja descrição qualitativa é o objetivo central do Teorema das Catátrofes Elementares de Thom.

1.2 Potenciais

O termo função potencial surgiu no século XIX na descrição matemática de fenômenos físicos associados à Mecânica e à Eletrostática. Por exemplo, o potencial gravitacional na Lei da Gravitação Universal de Newton:

> *Toda partícula de matéria no universo atrai qualquer outra partícula com uma força cuja direção é dada pela reta as une e que possui uma magnitude que é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.*

De fato, Lagrange acreditava que qualquer fenômeno da natureza era modelado por funções potenciais. O seguinte exemplo continua essa discussão.

Exemplo 1.8 (Potenciais Elétrico e Gravitacional)**.** Considere uma partícula no espaço $\mathbb{R}^3$ com carga elétrica q e posição $\mathbf{x}$. Pela Lei de Coulomb, existe um campo elétrico $\mathbf{E}$ determinado por essa carga e dado, a menos de constantes, por $\mathbf{E} = q \cdot \mathbf{x}/x^3$, onde x denota o valor do módulo de $\mathbf{x}$. Supomos ainda que estamos sob o regime eletrostático, no qual a carga elétrica se encontra em repouso. Pela 3ª lei de Maxwell isso implica que o rotacional $\mathrm{rot}(\mathbf{E}) = 0$. Por outro lado, o teorema de Stokes afirma que

$$\iint_D \mathrm{rot}(\mathbf{E})\, dx = \int_{\partial D} \mathbf{E}\, dt = 0,$$

onde D é um domínio de $\mathbb{R}^3$. Portanto, $\mathbf{E}$ é um campo conservativo e em uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^3$ e existe uma função V_E tal que $\mathbf{E} = -\nabla V_E$, a qual chamamos de *potencial elétrico*. Definindo a energia potencial como V_E e adotando o princípio de Hamilton, concluímos que o campo elétrico aponta para direções de menor potencial. Em outras palavras, as linhas de fluxo minimizam a ação do campo elétrico da partícula no espaço. Isso justifica a diferença de potencial em circuitos elétricos.

Uma situação totalmente análoga ocorre para uma partícula de massa m submetida à força gravitacional constante e seu campo gravitacional G associado e dado, a menos de constantes, por $\mathbf{G} = M \cdot \mathbf{x}/x^3$. Justificaremos o fato de $\mathbf{G}$ ser conservativo. Também pelo Teorema de Stokes, é suficiente mostrar que

$$\iint_D \mathrm{rot}(\mathbf{G})\, dx = 0.$$

Mas em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), a expressão de $\mathbf{G}$ depende somente de r e, portanto, $\mathrm{rot}(\mathbf{G}) = 0$ (veja o Exercício 1.6.1). Nesse caso, o campo gravitacional tem como direções aquelas de menor potencial gravitacional, o que justifica o movimento de atração de corpos.

Observação 1.9. Equivalentemente, podemos caracterizar os regime eletrostático e de gravitação Newtoniana como sistemas nos quais os campos elétrico e gravitacional são conservativos.

Formalizamos em seguida, o que são sistemas modelados por funções potenciais. Apesar de seu caráter abstrato, os próximos exemplos elucidarão essa abordagem.

Definição 1.10. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um sistema gradiente $\mathcal{S}$ definido em U e determinado pelo funcional potencial V é um sistema cujo comportamento é descrito pela diferencial ∇V. A soluções da equação $\nabla V = 0$ são chamadas estados de equilíbrio de $\mathcal{S}$.*

Em outras palavras, os estados de equilíbrio de $\mathcal{S}$ otimizam o funcional potencial V. Em diversos casos, a teoria de Singularidades permite uma descrição qualitativa simplificada de um fenômeno assim descrito.

Na Física Clássica, a teoria de funções potenciais é fortemente baseada nas chamadas Equações de Euler-Lagrange, as quais descreveremos em seguida. Considere um sistema físico composto de uma partícula no espaço $\mathbb{R}^n$ cuja posição é denotada por x e depende do tempo t, ou seja, $x = x(t)$. Considere a função

$$L = T - V,$$

onde T representa a energia cinética e V a energia potencial. A função L é chamada *Lagrangeana* e depende da posição x, a velocidade $\dot{x}$ e o tempo t. Estudar tal sistema significa determinar o comportamento qualitativo da função Lagrangeana entre dois pontos associados a um intervalo de tempo $[t_0, t_f]$. Para isso, introduzimos no espaço $\Omega\left(x(t_0), x(t_f)\right)$ de caminhos entre os pontos $x(t_0)$ e $x(t_f)$ o *funcional ação*:

$$V = \int_{t_0}^{t_f} L(\lambda, \dot{\lambda}, t)dt,$$

onde $\lambda \in \Omega\left(x(t_0), x(t_f)\right)$. Enunciamos o seguinte teorema, também conhecido como Lema Fundamental do Cálculo Variacional:

Teorema 1.11. *Se um caminho $\lambda(t)$ é um ponto crítico do funcional V, então*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Mais ainda, vamos admitir o *Princípio de Hamilton*, o qual afirma que a trajetória da partícula deve ser um caminho que minimiza (ou maximiza) a ação V e, portanto, é solução das equações (1.1). Essas são as relações chamadas de *Equações de Euler-Lagrange* e possuem descrições específicas dependendo do contexto em que se aplica, como veremos nos próximos exemplos.

Exemplo 1.12 (Mecânica)**.** Consideremos agora uma partícula de massa m no espaço $\mathbb{R}^n$ e cuja posição $\mathbf{x}$ depende do tempo t. Nesse caso, a energia cinética é dada em sua forma usual por $T = m \cdot \dot{\mathbf{x}}$. Considerando a energia potencial como arbitrária, obtemos as seguintes equações:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2\right) + V(\mathbf{x}).$$

Admitindo o Princípio Hamiltoniano, as Equações de Euler-Lagrange implicam que

$$m\ddot{x}_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Ou na forma vetorial, $m\ddot{\mathbf{x}} = \nabla V$. Em outras palavras, como a força é justamente a derivada da energia potencial, o princípio se torna equivalente à $2^{\underline{a}}$ Lei de Newton.

Observação 1.13. O equivalente do princípio de Hamilton no caso de potenciais elétricos mas em regime de corrente contínua, são as equações de Kirchhoff.

Exemplo 1.14 (Raios de Luz)**.** O *Princípio de Fermat* foi a primeira formulação da teoria de funções potenciais e afirma que qualquer raio de luz λ no espaço percorre uma trajetória entre dois pontos p_1 e p_2 que minimiza o tempo de viagem. Em outras palavras, se $\Omega(p_1, p_2)$ é o espaço de todas as possíveis trajetórias entre p_1 e p_2, o caminho percorrido minimiza o funcional

$$V(t) = \int_{p_1}^{p_2} dt.$$

Note que os princípios de Fermat e Hamilton são muito similares, mas os significados físicos são distintos. Podemos relacioná-los da seguinte maneira. Um caminho ϕ entre p_1 e p_2 pode ser descrito por $\phi_1 = x(z)$, $\phi_2 = y(z)$ e $\phi_3 = z$, onde $p_i = (x(z_i), y(z_i), z_i)$ para $i = 1, 2$. Portanto, o elemento de distância se torna

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}dz,$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$ e analogamente para $\dot{y}$. Então,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}\frac{dz}{dt} \Rightarrow dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}\frac{dz}{v}.$$

Definindo o índice de refração como $\eta(x, y, z) = \frac{1}{v}$, o Princípio de Fermat se torna matematicamente equivalente ao Princípio de Hamilton e afirma que a trajetória do raio λ é uma solução de equilíbrio do funcional

$$\int_{z_1}^{z_2} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z)dz,$$

onde $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = \eta\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}$ é a Lagrangeana.

Todos os exemplos acima representam fenômenos que não apresentam discontinuidades em suas soluções de equilíbrio. Em outras palavras, veremos que os pontos críticos de suas funções potenciais são sempre de tipo Morse ou, equivalentemente, sempre representam máximos ou mínimos. O Exercício 1.6.2 mostra como tal princípio implica a Lei de Refração de Snell.

Exemplo 1.15 (Ponto de Ebulição)**.** Suponha que o volume v de uma certa quantidade de massa de água é uma função dos parâmetros temperatura t e da pressão p. Posteriormente, veremos que essa é uma situação de equilíbrio para um certo sistema. A menos de constantes, essas variáveis são relacionadas pela equação dos gases $p \cdot v = t$. Sob uma pressão constante, o aumento da temperatura resulta em um aumento proporcional do volume e, na temperatura de ebulição da água, essa quantidade cresce de maneira discontínua.

Exemplo 1.16 (Máquina de Zeeman)**.** É um dispositivo simples desenvolvido por Christopher Zeeman na década de 1970 para ilustrar fenômenos discontínuos governados por potenciais. Consiste em um disco fixado por um eixo central O ao redor do qual possui liberdade de movimento e que está alocado sobre um determinado plano. Na fronteira do disco, anexa-se uma corda elástica RQ cuja extremida R está fixada no eixo vertical de O e outra corda QP cuja extremida P move-se livremente pelo plano. O dispositivo está representado na Figura 1.2. É claro que conforme movemos P, o ponto Q percorre um arco circular, o que corresponde ao movimento do próprio disco. No entanto, em determinados momentos a tendência é que ocorra uma rotação ou giro repentino, o que significa que em determinados pontos há uma discontinuidade. Para uma demonstração, veja esse vídeo.

Em termos matemáticos, tais pontos, chamados de *pontos de catástrofe*, correspondem a discontinuidades do parâmetro θ, que dependerá dos comprimentos l_1 e l_2 das cordas elásticas. A figura abaixo ilustra essa relação, onde, sem perda de generalidade, supomos o comprimento OR como o dobro do raio do disco. Pela lei dos senos e cossenos, temos que

$$l_1^2 = \left(s + \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \eta\right)^2$$
$$l_2^2 = 4 + \frac{1}{4} - 2\cos\theta$$

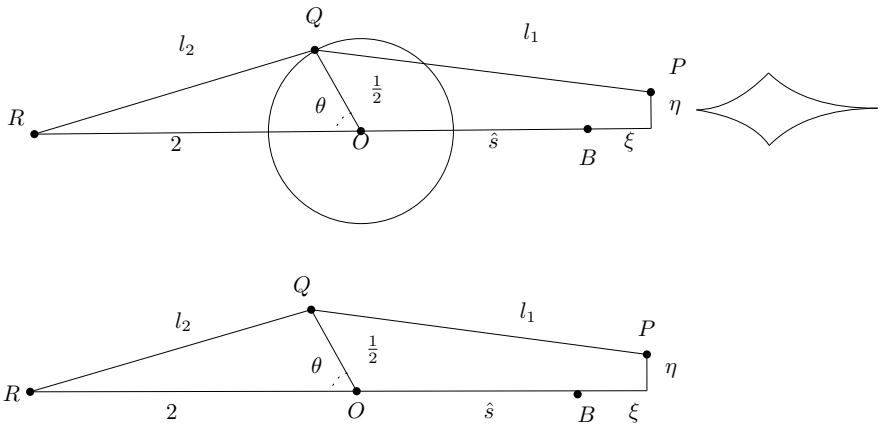


Figura 1.2: Máquina de Zeeman e pontos de catástrofe

onde $s = \tilde{s} + \xi$. Podemos supor ainda que o movimento do ponto Q é determinado sob o princípio de que minimiza a energia armazena pelas cordas e, portanto, depende de um coeficiente fixado associado ao material e dos comprimentos l_1 e l_2. Sua expressão é

$$V(\theta) = \mu \left[(l_1 - 1)^2 + (l_2 - 1)^2 \right],$$

onde supomos o raio do disco igual a 1. O comportamento da máquina de Zeeman pode, portanto, ser interpretado como um sistema $\mathcal{S}$ cujo estado θ é controlado pelas variáveis η e ξ. A função potencial V depende desses parâmetros e seu estudo qualitativo envolverá calcular os pontos críticos e determinar sua natureza. O teorema de Thom implicará que, a menos de mudança de coordenadas, temos que

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx,$$

o que corresponderá a uma catástrofe do tipo cúspide.

Exemplo 1.17 (Explosões Estelares)**.** As estrelas são corpos celestes formadas principalmente por gases como hidrogênio e hélio e com um núcleo duro no qual ocorre liberação de energia. Esses astros estão em equilíbrio hidrostático e, portanto, há uma relação entre a energia potencial relacionada a força gravitacional e a pressão, vinculada à energia cinética. Quando a estrela perde combustível, há uma perda da energia potencial e um aumento substancial de pressão. Isso resulta em um aumento significativo da densidade e consequentemente a explosão da estrela. O gráfico abaixo ilustra o comportamento da densidade como função da massa. Esse é um outro exemplo de sistema discontínuo. Voltaremos com mais detalhes à esse exemplo na Seção 3.4.

Definição 1.18. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.*

1. *Um campo vetorial $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido em U é uma aplicação suave que, a cada ponto $p \in U$, associa um vetor $\mathcal{V}(p) \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função potencial para um campo $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $\mathcal{V} = \nabla f$.*

O próximo critério, apesar de simples pode ser bastante útil.

Proposição 1.19. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial para $\mathcal{V} : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Então,*

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \ \ \forall \ \ i, j = 1, \ldots, n.$$

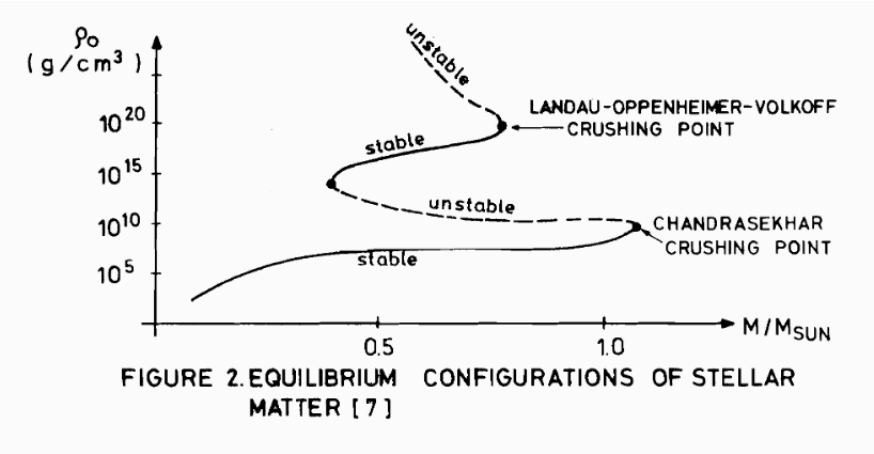


FIGURE 2. EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS OF STELLAR MATTER [7]

Figura 1.3: Estados de equilíbrio de uma estrela com parâmetros massa e densidade

Em geral, à partir dos exemplos acima, podemos concluir que uma análise de um fenômeno físico consistirá dos seguintes passos:

1. Identificar os parâmetros do sistema.
2. Identificar as relações entre os parâmetros.
3. Identificar o funcional potencial e o significado físico de suas soluções estacionárias.

Note no entanto que muitas vezes não é possível determinar explicitamente o funcional potencial cujas soluções estacionárias descrevem o fenômeno em questão. No entanto, veremos que ainda assim é possível descrever qualitativamente o sistema.

Definição 1.20. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema de estados de equilíbrio determinado por um funcional potencial $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto. Se $\det(H_V(p)) = 0$ para algum $p \in U$, então dizemos que $\mathcal{S}$ é discontínuo em p.*

Na próxima seção veremos que energias potenciais não singulares, ou seja, sistemas contínuos, possuem uma representação simples. Portanto, os fenômenos mais interessantes serão aqueles que apresentam discontinuidades e cujas representações serão classificadas pelo Teorema das Catástrofes Elementares sob hipóteses adicionais.

1.3 Formas Locais

Enunciamos em seguida o mais importante teorema sobre o comportamento local de aplicações suaves entre espaços de mesma dimensão.

Teorema 1.21 (Função Inversa)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em um ponto $p \in U$. Se $\det(J_F(p)) \neq 0$, então existe um aberto $\widetilde{U} \subset U$ contendo p e um aberto W contendo $F(p)$ tal que $F : \widetilde{U} \longrightarrow W$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.22. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é um aberto.*

1. *O **rank** de F em um ponto $p \in U$, denotado por $\operatorname{rank}_p F$ é o rank da aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*
2. *Se $m = 1$, o **corank** de f em p, denotado por $\operatorname{corank}_p(f)$ é o coposto da matriz Hessiana $H_f(p)$.*

Definição 1.23. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é um aberto.*

1. *Se $n \geq m$ e $\text{rank}_p(F) = m$ para todo $p \in U$, então F é chamada uma* ***submersão****.*
2. *Se $n \leq m$ e $\text{rank}_p(F) = n$ para todo $p \in U$, então F é chamada uma* ***imersão****.*
3. *Um ponto $p \in U$ é um* ***ponto crítico****, também chamado de ponto singular, se $\text{rank}_p(F)$ não é máximo.*

Como consequência do Teorema da Função Inversa, submersões e imersões possuem formas locais simples em coordenadas adequadas. Observe também que um ponto singular p é caracterizado como aquele em que $\text{rank}_p(F)$ não atinge seu valor máximo, ou seja, a dimensão da meta. Estudar tais funções será, portanto, nosso principal objetivo aqui.

Corolário 1.24 (Forma Local de Imersões)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Corolário 1.25 (Forma Local de Submersões)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma submersão em um ponto $p \in U$. Então, existem coordenadas locais em torno de p e $F(p) \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Para funções teremos uma forma local determinada mesmo que haja pontos críticos.

Definição 1.26. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto crítico $p \in U$ é dito ser uma singularidade de Morse se $\det(H_f(p)) \neq 0$. Um ponto de Morse é também chamado de ponto crítico não-degenerado.*

Lema 1.27 (Morse)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $p \in U$ é uma singularidade de tipo Morse, então existem coordenas em torno de p e $f(p) \in \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

1.4 Principal Objetivo

Na seção anterior, vimos como o comportamento das derivadas de uma aplicação determinam sua forma local. Para situações mais gerais para as quais há pontos críticos, formalizamos a noção de germes para lidar com o contexto local e introduzimos o grupo $\mathcal{R}$, que determina uma relação de equivalência entre funções através de mudanças suaves de coordenadas.

Definição 1.28. *Sejam $U, W \ni 0$ conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Se existe um aberto $X \ni 0$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \cap X = W \cap X$, então dizemos que U e W definem o mesmo* ***germe de conjunto*** *na origem.*
2. *Sejam $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves definidas nos abertos U e W satisfazendo $F(0) = G(0) = 0$. Se existe um aberto $X \ni 0$ tal que $X \subset U \cap W$ e $F_{|X} = G_{|X}$, então dizemos que F e G definem o mesmo* ***germe de aplicação*** *na origem.*

Em ambos os casos, a noção de germes implica uma relação de equivalência bem definida (veja o Exercício 1.6.6). No caso de aplicações, a classe de equivalência de uma aplicação suave F definida em um aberto $U \ni 0$ é denotada por $F : (\mathbb{R}^n\, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$.

Definição 1.29. *O conjunto dos germes $F : (\mathbb{R}^n\, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ de aplicações suaves na origem é denotado por $\mathcal{E}_{n,m}$. Quando $m = 1$, escrevemos $\mathcal{E}_{n,1} = \mathcal{E}_n$.*

Exemplo 1.30. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que $0 \in M$. Então, o germe de conjunto definido por M na origem é o germe, na origem, de um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ mergulhado em $\mathbb{R}^3$, visto que toda superfície regular é localmente equivalente a tal conjunto. A mesma conclusão vale para qualquer variedade mergulhada $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in M$.

Exemplo 1.31. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave tal que $0 \in U$ e $F(0) = 0$. Se F é uma imersão ou uma submersão, então o germe $F : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ é, a menos de uma mudança de coordenadas, da forma (1.24) ou (1.25), respectivamente.

Já vimos que a noção de germes formaliza o estudo local de conjuntos e aplicações. Como indicamos anteriormente, as equivalências que estudaremos se referem a mudanças suaves de coordenadas, ou seja, difeomorfismos locais.

Definição 1.32.

1. *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Se existem abertos $U, W \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\phi : U \longrightarrow W$ é bijetora cuja inversa também é suave, então chamamos ϕ de um difeomorfismo local.*
2. *O grupo $\mathcal{R}$ consiste de germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.*

Exemplo 1.33. O mapa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ é um difeomorfismo local, mas não global.

O grupo $\mathcal{R}$ age no espaço $\mathcal{E}_n$ de germes de funções suaves da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ (h, f) &\longmapsto f \circ h^{-1} \end{aligned}$$

No entanto, $\mathcal{R}$ não é um grupo de Lie e tampouco $\mathcal{E}_n$ uma variedade suave.

Definição 1.34. *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são $\mathcal{R}$-equivalentes, ou simplesmente **equivalentes**, se existe $\phi \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ \phi^{-1} = g$. Usualmente, denotamos tal relação por $f \sim_{\mathcal{R}} g$.*

Em outras palavras, f e g são equivalentes se possuem a mesma $\mathcal{R}$-órbita com relação à ação acima.

Exemplo 1.35. Sejam $f = x^2 + y^2 - y^4x^4$ e $g = x^2 + y^2 - 2y^3x^2$ germes de funções. Então $f \sim_{\mathcal{R}} g$ pelo germe de difeomorfismo definido por

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x \\ y &\longmapsto y - x^2y^2 \end{aligned}$$

Exemplo 1.36. Sejam $f = x^3 - y^3$ e $g = y^3 + 3x^2y$ germes de funções. Então $f \sim_{\mathcal{R}} g$ pelo germe de difeomorfismo definido por

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + y \\ y &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

Proposição 1.37. *Se $f, g \in \mathcal{E}_n$ são tais que $f \sim_{\mathcal{R}} g$, então* $\operatorname{corank}(f) = \operatorname{corank}(g)$.

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem tal que $f = g \circ \phi$, onde $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ é um difeomorfismo. Pela regra da cadeia, para cada i, k, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_i} \right).$$

Portanto, podemos escrever

$$H_f = H_g \cdot J_\phi + \nabla(g) \cdot M,$$

onde J_ϕ é a matriz Jacobiana de ϕ, $\nabla(g)$ é o gradiente de g e M é uma matriz que depende das derivadas parciais de ordem maior que 2 das funções coordenadas de ϕ. Como $\nabla(g)(0) = 0$, segue que

$$H_f(0) = H_g(0) \cdot J_\phi(0),$$

onde usamos que $\phi(0) = 0$. Como $J_\phi(0)$ é uma matriz invertível, os coranks de $H_f(0)$ e $H_g(0)$ devem ser os mesmos. □

Podemos formular o principal objetivo da curso da seguinte maneira:

> *Dado um sistema $\mathcal{S}$ definido como estados de equilíbrio de um germe de funcional potencial V, encontrar uma forma local para V, também chamada de* ***forma normal****, de maneira que o estudo qualitativo de $\mathcal{S}$ possa ser simplificado.*

1.5 Sobre os Fenômenos

Nesta seção introduzimos duas convenções, ou princípios, que assumiremos serem satisfeitos pelos fenômenos estudados nos capítulos posteriores.

Princípios de Maxwell e do Retardamento

Na Seção 1.2 vimos como os princípios de Hamilton e Fermat se aplicam na análise de certos fenômenos física e podemos concluir que os campos elétrico e gravitacional apontam para direções de menor potencial. O *Princípio de Maxwell* generaliza essa convenção para qualquer fenômeno governado por um potencial. Mais especificamente:

> *Seja $\mathcal{S}$ um sistema governado por um potencial V. Seja $p \in U$ um estado de equilíbrio, isto é, $\nabla V(p) = 0$. Então, o estado de equilíbrio atingido pelo sistema é sempre aquele que otimiza o potencial V.*

Em outras palavras, o estado de equilíbrio escolhido é sempre aquele em que há a otimização da energia potencial. Nos casos em que a Hessiana é positiva ou negativa definida, o Teorema 1.7 já estabele que p otimiza localmente a função. Portanto, os pontos de equilíbrio mais interessantes serão aqueles em que há singularidades mais degeneradas que as tipo Morse, pois poderá haver mais de uma possibilidade de valor para o potencial, todavia determinado pela convenção acima. Ainda sobre estados de equilíbrio de tipo Morse, os sistemas estudados devem obedecer o seguinte princípio, o qual chamamos de *Princípio do Retardamento*:

> *Um estado de equilíbrio de tipo Morse tende continuamente, de acordo com os parâmetros de controle, para um estado de tipo não Morse. Em tais estados o comportamento qualitativo do sistema sofre uma alteração.*

Estabilidade Estrutural

A confiabilidade de um experimento científico se baseia fortemente na previsibilidade de suas repetições. Isto é, sob as mesmas condições, os resultados e comportamentos esperados em sucessivas execuções devem ser os mesmos. No entanto, na prática esse é um objetivo inalcançável e algumas perturbações ou alterações devem ser consideradas, inclusive pelos modelos matemáticos adotados. O nível e sensibilidade de tais alterações devem ser mensurados de acordo com os objetivos.

Exemplo 1.38. Por exemplo, o desgaste de uma máquina mecânica em um intervalo de tempo pequeno pode ser irrelavante para sua operação cotidiana, mas ao longo de anos impacta severamente sua eficácia. Outro exemplo está relacionado com a Lei de Faraday, que relaciona a existência de campos magnéticos e elétricos. Isso implica que aparelhos elétricos, tais como rádio e televisão, são sucetíveis a interferências externas. Tal perturbação possui níveis de controle e sensibilidade que dependem de cada contexto.

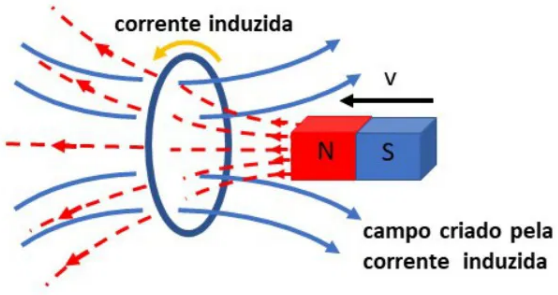


Figura 1.4: Indução Eletromagnética

Em nosso contexto, portanto, vamos requerer que os fenômenos estudados não sofram alterações qualitativas quanto perturbados de acordo com certas limitações e a estes chamaremos *sistemas estruturalmente estáveis*. Uma primeira definição matemática seria a seguinte:

> *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial, onde U é um aberto. Dizemos que f é estruturalmente estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena por uma função suave $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, então $f + g$ também é equivalente a f.*

O primeiro exemplo de funções estruturalmente estáveis são as de Morse. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, denotamos o espaço de funções suaves em U por $C^\infty(U)$. Esse conjunto pode ser munido de uma certa topologia, conhecida como *topologia de Whitney*, mas não entraremos nesses detalhes. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um ponto $p \in U$ como uma singularidade de Morse, então $\det(H_f(p)) \neq 0$. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\longmapsto C^\infty(U) \longmapsto \mathbb{R} \\ g &\longmapsto f + g \longmapsto \det(H_{f+g}(p)) \end{aligned}$$

É razoável concluir que, de acordo com tal estrutura, essa aplicação consiste da composição de aplicações contínuas e, portanto, para g suficientemente próxima de f, $\det(H_{f+g}(p)) \neq 0$.

Exemplo 1.39. Seja $f(x) = x^3$ e considere a perturbação $g(x) = x^3 + \epsilon x$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ é suficientemente pequeno. Se $\epsilon > 0$, então $f + g$ não possui pontos críticos e se $\epsilon < 0$, possui dois. Além disso, tais pontos são não-degenerados. Portanto, concluímos que $f(x)$ não é estruturalmente estável, visto que admite perturbações que não são equivalentes.

Mais geralmente, é possível mostrar que somente funções de Morse podem ser estruturalmente estáveis conforme a definição acima (veja [12]). Para que possamos formular matematicamente fenômenos estruturalmente estáveis, precisamos alterar a descrição de funções potenciais para que outras singularidades sejam permitidas. O significado matemático dessa hipótese será introduzido posteriormente, mas adiantamos o seguinte:

> *As funções potenciais V serão descritas por meio de variáveis de estados x e variáveis de controle u e, portanto, terão um domínio em um espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. A estabilidade estrutural se traduz para a hipótese de que **todos os possíveis estados** do sistema, incluindo perturbações suficientemente controladas, são descritos qualitativamente pelos controles u através do potencial V.*

Dessa maneira, tais funções potenciais admitem singularidades muito mais gerais que de tipo Morse, visto que os estados são *perturbados* somente pelas variáveis de controle. As conclusões da teoria são ainda mais fortes. O Lema de Decomposição 2.1, mostrará que o número de variáveis de controle pode ser drasticamente reduzido a fim de entender o comportamento local do sistema.

É importante destacar que o conceito de estabilidade estrutural possui variadas definições mas foi originalmente formulado, de uma maneira distinta da adotada em Teoria de Singularidades, pelos matemáticos russos A.A Andronov e L. Pontriaguin no contexto dos Sistemas Dinâmicos. O matemático brasileiro Maurício Peixoto foi um dos grandes pioneiros da teoria, ao demonstrar que tal propriedade é *genérica* dentre os fluxos em superfícies compactas (veja [17]).

Tabela de Aplicações

Os fenômenos estudados qualitativamente por meio da Teoria de Catástrofes e apresentados na Aula III foram consultados em diversas referências, propriamente citadas em seu contexto. Como dito anteriormente, a teoria se propõe a ser um programa que permite a descrição qualitivativa de uma generalidade de sistemas e na tabela abaixo indicamos (quando se aplica) como isso se traduz aproximadamene para cada uma das aplicações.

Fenômeno	**Potencial/Equilíbrio**	**Princípio de Maxwell**	**Princípio do Retardamento**
Mecânica	Funcional de energia	Princípio de Hamilton	Diferença de potencial gravitacional
Gravitação	Campo Gravitacional	-	Atração de corpos
Eletrostática	Campo Elétrico	-	Diferença de potencial elétrico
Raios de Luz	Funcional de tempo	Princípio de Fermat	-
TRansição de Fase	Função de Gibbs	Princípio da Energia Mínima	2ª Lei da Termodinâmica
Sistemas Estelares	Hidrostático	Princípio da Energia Mínima	-

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1. *Seja $F = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ munido de coordenadas locais x_1, x_2, x_3. Relembre que o rotacional de F, denotado por* $\mathrm{rot}(F)$*, pode ser descrito como o produto vetorial*

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot F_2$ é a derivada parcial de F_2 com relação a x_1 e analogamente para os outros produtos.

1. *Se em coordenadas esféricas temos que $F = F_r\boldsymbol{r} + F_\phi\boldsymbol{\phi} + F_\theta\boldsymbol{\theta}$, então* $\mathrm{rot}(F)$ *é*

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r} & r\sin\theta\boldsymbol{\phi} & r\boldsymbol{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & r\sin\theta F_\phi & rF_\theta \end{vmatrix},$$

2. *Considerando a expressão $\boldsymbol{G} = M \cdot \boldsymbol{x}/x^3$ para o campo gravitacional, mostre que $\boldsymbol{rot}(G) = 0$ e, portanto, ele é conservativo.*

Exercício 1.6.2. *Seja $\mathcal{L}$ um raio de luz partindo atravessando dois ambientes com índices de refração η_1, η_2 e ângulos de refração θ_1, θ_2, respectivamente (veja a figura abaixo). Admitindo o Princípio de Fermat, mostre que*

$$\eta_1 \sin\theta_1 = \eta_2 \sin\theta_2.$$

Essa relação é chamada Lei de Snell.

Exercício 1.6.3. *Seja $\boldsymbol{V} : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial definido em um aberto simplesmente conexo U. Mostre que as três condições abaixo são equivalentes.*

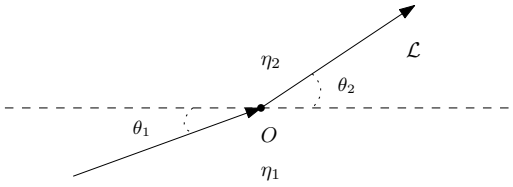


Figura 1.5: Refração dos raios de luz

1. *Existe uma função potencial* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *para* $\boldsymbol{V}$.
2. $\boldsymbol{rot}(F) = 0$.
3. *A integral de linha* $\int_{x_0}^{x_1} F dt$ *entre quaisquer dois pontos* $x_0, x_1 \in U$ *não depende do caminho escolhido.*

Exercício 1.6.4. *Mostre que uma submersão* $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *leva abertos contidos em* U *em abertos de* $\mathbb{R}^m$.

Exercício 1.6.5. *Determine os pontos críticos das funções abaixo e a natureza de cada um deles, ou seja, se é isolado, máximo, mínimo ou ponto de sela.*

1. $f(x, y) = x^2 + y^3$.
2. $f(x, y) = x^2 + 11xy + \frac{y^2}{2} + x^6$.
3. $f(x, y) = 10xy + y^2 + 75y^3$.

Exercício 1.6.6. *Mostre que as noções de germes de conjunto e aplicações introduzidos na Definição 1.28 determinam uma relação de equivalência bem-definida.*

Exercício 1.6.7.

1. *Se* $f \sim_{\mathcal{R}} g$, *então os germes de conjuntos* $f^{-1}(0)$ *e* $g^{-1}(0)$ *são difeomorfos.*
2. *Encontre contra-exemplos para a recíproca do item anterior.*

Exercício 1.6.8.

1. *Mostre que os germes* $x^2 - y^2$ *e* $x^2 - y^3$ *não são equivalentes.*
2. *Mostre que os germes* $x^2 + y^2$ *e* $x^{2n} + y^{2m}$, *onde* $n, m \geq 2$, *não são equivalentes.*
3. *Mostre que os germes* $xy + Axz^2 + Byz^2$ *e* $x^2 - y^2 + ABz^4$, *onde* $AB \neq 0$, *são equivalentes.*

Exercício 1.6.9. ***Aviso****: Este exercício requer o conhecimento das noções de anéis e módulos.*

1. *Verifique que* $\mathcal{E}_n$ *é um anel comutativo com identidade.*
2. *Seja* $\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}$. *Mostre que* $\mathfrak{m}_n$ *é o único ideal maximal de* $\mathcal{E}_n$.
3. *Verifique que* $\mathcal{E}_{n,m}$ *é um* $\mathcal{E}_n$*-módulo.*

Aula 2

Catástrofes Elementares de Thom

Neste capítulo, enunciamos a classificação das catástrofes elementares de Thom. Para isso, introduzimos novas definições que formalizam matematicamente as considerações teóricas do capítulo anterior. As principais referências são [14], [16], [6] e [13].

2.1 Lema de Decomposição

Na Seção 1.3 vimos como o comportamento da diferencial de uma aplicação suave pode determinar sua forma, ou representação, em uma vizinhança de um ponto. Um dos primeiros objetivos da teoria de singularidades é obter formais normais simplificadas para funções que possuem pontos críticos. Nessa direção, o mais importante resultado é o lema de Morse. De certa maneira, veremos que singularidades mais degeneradas que as de tipo Morse ainda podem ser simplificadas e terem o comportamento qualitativo determinado por um número menor de variáveis. O Lema de Morse pode ser generalizado da seguinte maneira.

Lema 2.1 (Decomposição)**.** *Seja* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ *um germe tal que* 0 *é um ponto crítico e* $\operatorname{corank}(f) = c$*. Então,* f *é equivalente a um germe da forma*

$$g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

onde $0 \in \mathbb{R}^n$ *é um um ponto crítico degenerado de* g*.*

Demonstração. □

Em outras palavras, germes estruturalmente estáveis podem ser decompostos como singularidades mais degeneradas que aquelas de tipo Morse em um número menor de variáveis e uma parte quadrática. O significado físico desse resultado é que o número de variáveis de controle de um sistema estruturalmente estável pode ser reduzido de acordo com o seu corank.

Observação 2.2. Se considerarmos funções holomorfas, os lemas de Morse e de Decomposição continuam válidos. Além disso, como todas as formas quadráticas em variáveis complexas são equivalentes por difeomorfismos holomorfos, a decomposição acima se torna única a menos de $\mathcal{R}$-equivalência.

2.2 Deformações

A linguagem de deformações vai permitir interpretar o domínio de funções potenciais como uma decomposição entre variáveis de estado e de controle. Mais formalmente, temos o seguinte.

Definição 2.3. *Seja* f *um germe suave tal que* 0 *é um ponto crítico.*

1. *Uma* ***deformação*** *a k-parâmetros de f é um germe*

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto F(x, u)$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$.

2. *Duas deformações F e G a k-parâmetros são* ***equivalentes*** *se existe um germe de difeomorfismo*

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$$
$$(x, u) \longmapsto (\phi_u(x), u)$$

tal que $\Phi(x, 0) = (x, 0)$ e $F = G \circ \Phi$.

3. *Uma deformação a k-parâmetros F é chamada de* ***trivial*** *se é equivalente à deformação constante $G(x, u) = f(x)$.*

4. *O germe f é chamado de* ***estável*** *quando todas as suas deformações são triviais.*

Definição 2.4.

1. *Seja $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função potencial nas variáveis $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Dizemos que o espaço $\mathbb{R}^n$ é o espaço de estados e que $\mathbb{R}^k$ o espaço de controle.*

2. *O conjunto* ***catástrofe****, também chamado de estados de equilíbrio, é*

$$C_V = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) : \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, u) = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n \right\}.$$

3. *O conjunto de* ***bifurcação****, também chamado de estados de equilíbrio instável, é*

$$B_V = \left\{ u \in (\mathbb{R}^k, 0) : \exists \, (x, u) \in C_F \text{ tal que } \operatorname{rank} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) < n \right\}.$$

Equivalentemente, o conjunto de estados $C_V = \{\nabla_x V = 0\}$, onde as derivadas parciais são tomadas com relação somete às variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Observe também que o conjunto de bifurcação consiste de pontos críticos degenerados das singularidades geradas por F. O comportamento discontínuo ou singular de um dado sistema corresponderá às variáveis de controle contidas no conjunto de bifurcação.

Exemplo 2.5. Seja $f(x) = x$ e considere as seguintes deformações a k-parâmetros:

- $F(x, u) = f(x) = x$
- $G(x, u) = (x + ux^2, u)$

Defina a aplicação $\Phi(x, u) = (x + ux^2, u)$. Calculando sua matriz jacobiana em 0, vemos que Φ define um germe de difeomorfismo. Agora, observe que $F \circ \Phi = G$. Como F é a deformação trivial, segue que G é trivial. Mais geralmente, seja $H(x, u)$ uma deformação, isto é, $H(x, 0) = f(x) = x$. Defina

$$\Psi(x, u) = (H(x, u), u).$$

Se $\widetilde{H}(x, u) = H(x, u) - H(x, 0)$, então $\widetilde{H}$ se anula em u. Assim, podemos escrever $H(x, u) = uH' + x$ para alguma função suave $H'(x, u)$, pelo Lema de Hadamard. Pelo mesmo argumento do parágrafo anterior, segue que Ψ é um germe de difeomorfismo. Agora, $H = F \circ \Phi$. Concluímos que toda deformação é trivial e, portanto, x é um germe estável.

Deformações permitem estudar propriedades de germes próximos de pontos críticos. Por outro lado, gostaríamos de entender todos os possíveis fenômenos relativos ao germe e próximos da singularidade. O conceito de deformação versal nos permite concluir esse objetivo ao capturar todas as possíveis singularidades em que uma dada singularidade pode ser deformada ou perturbada. Dessa maneira, essa será a formulação matemática para a noção de estabilidade estrutural.

Definição 2.6.

1. *Seja* $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ *uma deformação de um germe* f. *Seja* $h : (\mathbb{R}^a, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ *um germe de aplicação. O* ***pullback*** *de* F *por* h *é a deformação*

$$\begin{aligned} h^*F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, v) &\longmapsto F(x, h(v)) \end{aligned}$$

   Essa deformação é também chamada de mudança de parâmetros da deformação.

2. *Uma deformação* F *a* k*-parâmetros é chamada* ***versal*** *se para qualquer deformação* G *a* a*-parâmetros existe uma mudança* h *de parâmetros tal que* h^*F *e* G *são equivalentes.*

3. *Uma deformação versal* F *a* k*-parâmetros é chamada* ***miniversal*** *se não existe uma deformação versal a um número de parâmetros menor que* k.

4. *Sejam* F *e* G *duas deformações a* k*-parâmetros. Elas são chamadas* ***isomorfas*** *se existe uma mudança de parâmetros* $h : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, *que é também um difeomorfismo, tal que* G *é equivalente a* h^*F.

Uma mudança de parâmetros, portanto, permite estabelecer equivalência entre deformações com diferentes parâmetros de controle.

Exemplo 2.7. Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$ e considere as deformações $F = x^2 + y^3 + u_1 y + u_2$ e $G = x^2 + y^3 - 3v^2 y + 2v^3$. Se $h(v) = (-3v^2, 2v^3)$, então $G = h^*F$. Em particular, F e G são equivalentes.

2.3 Teorema de Classificação

O Lema de Decomposição 2.1 estabelece formas normais, ou representantes mais simples, para singularidades possivelmente degeneradas. Para evitar a escrita das formas quadráticas, introduzimos a seguinte generalização da $\mathcal{R}$-equivalência.

Definição 2.8. *Duas deformações* F, G *a* k*-parâmetros são* $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$*-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo* $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0)$ *da forma* $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ *e um germe de função* $c : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que:*

$$G = F \circ \Phi(x, u) + c(u).$$

Ou seja, essa nova equivalência permite uma translação e o germe de difeomorfismo não necessariamente é um desdobramento da identidade. Lembre-se que o Lema de Decomposição permite reduzir os potenciais para um número menor de variáveis a menos de uma soma com uma forma quadrática. Como estamos interessados em comportamentos discontínuos, que somente podem ser gerados por pontos degenerados, a omissão de tais formas quadráticas não representa uma perda qualitativa para a teoria.

Com relação às aplicações do teorema, as duas hipóteses se traduzem como: o número de parâmetros de controle do sistema é limitado a 4 e a hipótese de estabilidade estrutural. No que segue, estudamos em detalhes a geometria da dobra e da cúspide.

Teorema 2.9 (Catástrofes de Thom)**.** *Seja* $V : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma deformação versal tal que* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Então,* V *é* $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$*-equivalente a uma, e somente uma, das deformações abaixo:*

Tipo	Singularidade	Deformação Versal	Nome
A_2	x^3	$x^3 + u_1x$	Ponto
A_3	x^4	$\pm x^4 + u_2x^2 + u_1x$	Cúspide
A_4	x^5	$x^5 + u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	Rabo de Andorinha
A_5	x^6	$\pm x^6 + u_4x^4u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x$	Borboleta
D_4^-	$x^3 + y^3$	$x^3 - xy^2 + u_3(x^2 + y^2) + u_2y + u_1x$	Hiperbólica Umbílica
D_4^+	$x^3 + 3xy^2$	$x^3 + y^3 + u_3xy + u_2y + u_2x$	Elíptica Umbílica
D_5	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + u_4y^2 + u_3x^2 + u_2y + u_1x$	Parabólica Umbílica

Dobra

A catástrofe mais simples consiste na deformação versal $V(x, u) = x^3 + ux$ da singularidade x^3. Como há uma variável de estado e um controle, a superfície de equilíbrio é na verdade uma curva. Os estados críticos degenerados das singularidades geradas por V são determinados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} & = 3x^2 + u = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x^2} & = 6x = 0 \end{cases}$$

Portanto, a superfície de equilíbrio consiste de uma parábola e o conjunto de bifurcação, contido no eixo u, somente da origem. Quando $u > 0$, $V(x, u)$ não possui pontos críticos e o regime de estados é vazio. Quando $u < 0$, há um máximo e um mínimo, ambos estáveis. Todas essas propriedades podem ser visualizadas na Figura 2.1. Uma última observação refere-se ao nome, empregado na medida em que a curva de equilíbrio se *dobra* sobre o eixo de controle u.

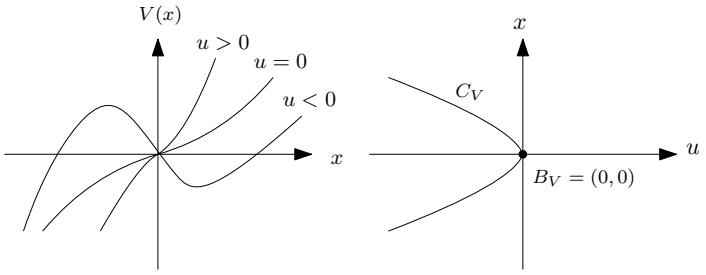


Figura 2.1: Singularidades geradas e curva de equilíbrio

Cúspide

A segunda catástrofe mais simples é a cúspide, que consiste da deformação $V(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$ da singularidade x^4. Como sua superfície de equilíbrio está contida em $\mathbb{R}^3$, o seu estudo qualitativo pode ser feito com mais detalhes e, ainda assim, apresenta propriedades importantes para uma variedade de aplicações. De fato, quase todas as aplicações da teoria de catástrofes se referem a sistemas com duas variáveis de controle e, portanto, a cúspides. A superfície de equilíbrio consiste dos pontos $(x, u, v) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4x^3 + 2ux + v = 0.$$

Os pontos críticos degenerados (x, u, v) são aqueles em que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 12x^2 + 2u = 0.$$

Para determinar o conjunto de bifurcação, que está contido no plano uv, devemos encontrar as condições sobre (u, v) para que existe x_0 tal que (x_0, u, v) satisfaçam ambas as equações. Da segunda equação, obtemos

$$u = -6x_0^2$$

e substituindo isso na primeira, encontramos $v = -8x_0^3$. Para descrever esse conjunto somente em termos de u e v, note que $u^3 = \kappa v^2$, onde $\kappa = -27/8$. Portanto, encontramos que o conjunto é a **cúspide** determinada por

$$B_V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 8u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

Com auxílio de um software podemos encontrar a forma de C_V, como na Figura 2.2 abaixo.

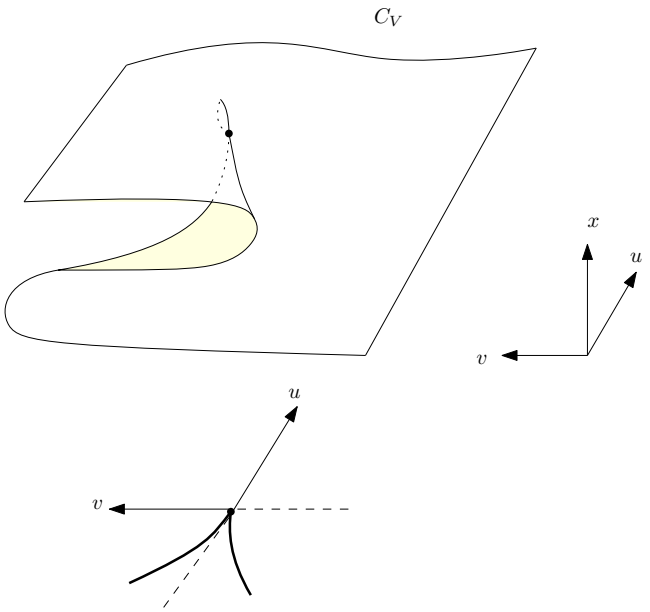


Figura 2.2: Catástrofe cúspide e seu conjunto de bifurcação

Vamos considerar agora caminhos sobre a superfície de estados para analisar a ocorrência de equilíbrios estáveis e instáveis. Posteriormente, apresentamos 3 conceitos introduzidos por Zeeman que caracterizam essa catástrofe e está relacionado com o comportamento sobre a superfície (veja a Figura 2.3).

- Os caminhos 1 e 2 em verde representam estados de equilíbrio e o que ocorre quando alteramos significativamente somente um dos parâmetros de controle. Como esperado, isso implica uma alteração (vertical) também na variável de estados, mas sem ocorrência de discontinuidades.
- Os caminhos 3 e 4 em vermelho representam caminhos nos quais há pontos de catástrofes e o que se ocorre quando alteramos significativa e simultaneamente ambos os parâmetros de controle.
- Os caminhos 5 e 6 em laranja representam um comportamento misto de estabilidade e instabilidade, quando discontinuidades ocorrem mais de uma vez.

As projeções desses caminhos no espaço de controle estão representadas na Figura 2.4. Exemplos de como esses comportamentos podem ocorrer em fenômenos físicos e sociais onde os parâmetros são bem especificados é o conteúdo da próxima aula. Esse comportamento pode ser sintetizado por 5 conceitos.

1. **Bimodalidade:** É a propriedade caracterizada pelo fato de que existem parâmetros de controle associados a mais de um estado possível. Isso ocorre, por exemplo, na região que é projetada para o interior de B_V. Em outras palavras, a superfície de equilíbrio, como um todo, não pode ser o gráfico de uma função de duas variáveis.

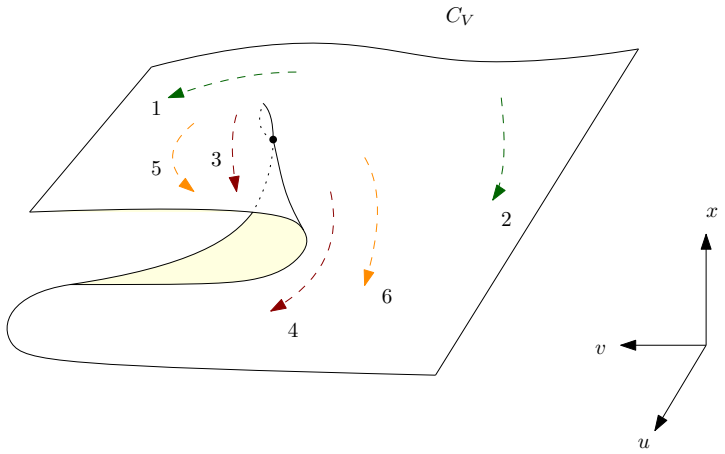


Figura 2.3: Caminhos sobre a superfície de equilíbrio

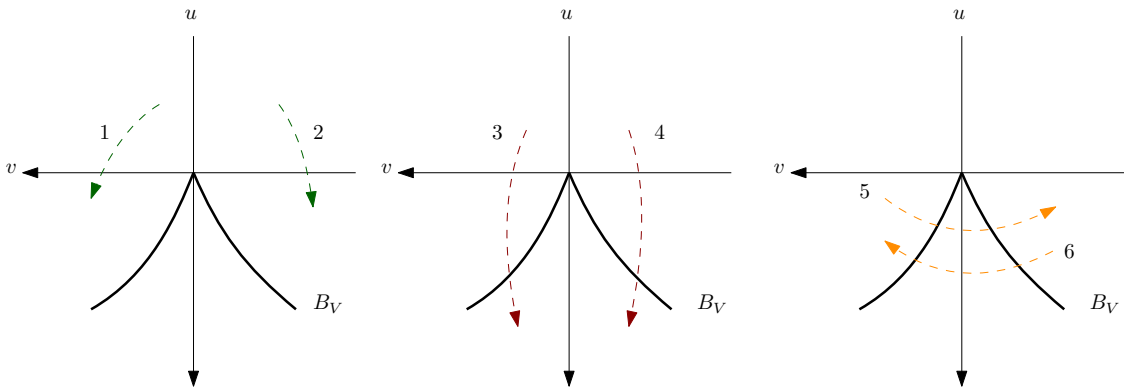


Figura 2.4: Catástrofe cúspide e seu conjunto de bifurcação

2. **Discontinuidade:** Essa propriedade é justamente representada pelos pontos correspondentes aos pontos de bifurcação, ou simplesmente aos chamados pontos de discontinuidade de C_V. Grosseiramente falando, é quando a superfície se curva de uma maneira abrupta ou repentina e então sua geometria sofre uma alteração qualitativa.

3. **Divergência:** Dois pontos alocados em porções distintas de C_V podem ser conectados de distintas maneiras, em particular, passando ou não por discontinuidades. Ou seja, a transição entre estados pode manifestar comportamento qualitativamente distintos.

4. **Histerese:** Na superfície de equilíbrio, a discontinuidade da parte superior em direção a inferior não ocorre para as mesmas variáveis de estado. Em outras palavras, catástrofes ocorrem em estados distintos.

5. **Inacessibilidade:** A região limitada inferiomente pela porção amarela na Figura 2.3 é inacessível, ou seja, representa estados que nunca são realizáveis ou verificados.

Observação 2.10. Na Figura 2.2, considere a interseção de C_V com planos transversais ao plano uv e observe que a curva assim obtida se aproxima da curva de equilíbrio da catástrofe dobra. Ou seja, a catástrofe do tipo dobra também se manifesta nas discontinuidades do tipo cúspide. Em outras palavras, qualquer deformação versal da singularidade x^4 inclui uma deformação para uma singularidade equivalente a x^3.

A partir de variáveis de controle (u_0, v_0) fixadas, o comportamento do sistema pode ser estudado à partir das funções $V(x, u_0, v_0)$ cujos gráficos podem ser representados no plano de controle uv, conforme

está na Figura 2.5. Observamos que fora da cúspide há somente estados de equilíbrio estáveis que representam mínimos. Por outro lado, na região interior, há dois equilíbrios possíveis e as discontinuidades ocorrem justamente quando atravessamos a cúspide.

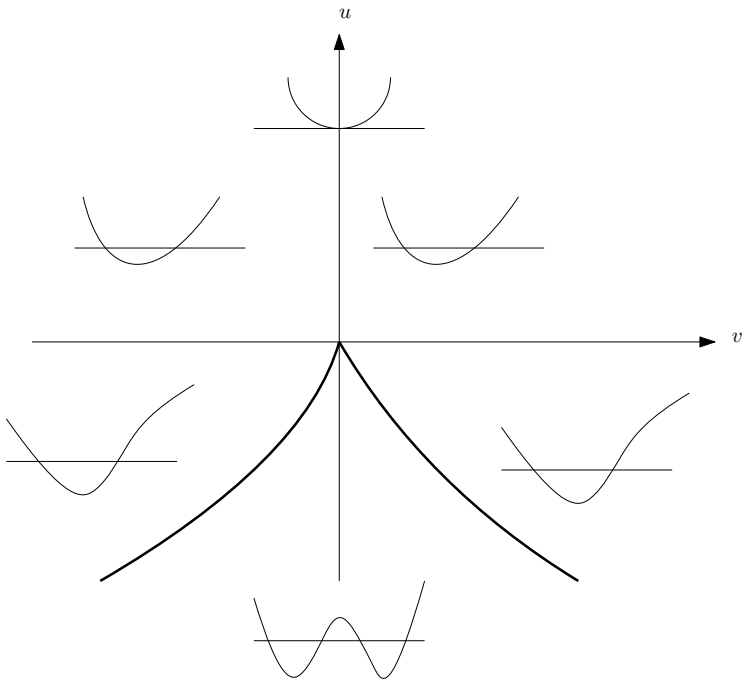


Figura 2.5: Potencial $V(x)$ para diferentes valores u, v

2.4 Exercícios

Exercício 2.4.1. *Mostre que se duas deformações são equivalentes, então elas são isomorfas.*

Exercício 2.4.2. *Mostre que se h é um germe de difeomorfismo do espaço de parâmetros e F é uma deformação, então F e h^*F são isomorfas.*

Exercício 2.4.3. *Se um germe f é estável, então todas suas deformações são versais.*

Exercício 2.4.4. *Mostre que qualquer deformação versal é isomorfa a deformação constante de uma deformação miniversal.*

Exercício 2.4.5. *Mostre que qualquer deformação de um germe de função é estável como um germe de função também.*

Exercício 2.4.6. *Com as hipóteses adequadas, enuncie o Lema de Decomposição para deformações $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com respeito às $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P} - \mathcal{R}^+$-equivalências.*

Aula 3

Aplicações

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações da teoria desenvolvida anteriormente. Em muitos casos, a Teoria de Catástrofes se configura como uma reformulação matemática de modelagens qualitativas já estabelecidas ou conhecidas. No entanto, acreditamos que revisitar esses exemplos é uma interessante motivação e inspiração para estudar muitos aspectos teóricos da Teoria de Singularidades. Em todos os casos, convencionamos que os fenômenos são **estruturalmente estáveis**.

3.1 Cáusticas

Na Óptica clássica, os raios de luz em ambientes com mesmo índice de refração são considerados como segmentos de retas. Além disso, para nossos propósitos, consideramos a energia sendo transportada ao longo de tais segmentos no lugar de sua natureza de onda. O fenômeno que apresentaremos ocorre quando um feixe de raios é refletido em uma dada superfície fixada e, portanto, gera uma curva chamada de *cáustica*.

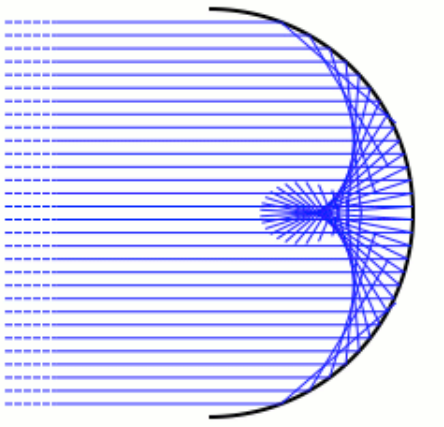


Figura 3.1: Cáustica formada por raios paralelos ao eixo x

Seja $F(\theta, x, y) = 0$ uma família de curvas parametrizada por $\theta \in \mathbb{R}$. O *envelope* de F consiste de uma curva C satisfazendo a seguinte condição: para todo parâmetro θ_0 existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que C é tangente a $F(\theta_0, x, y) = 0$ em (x_0, y_0). Afirmamos que C é definida pelas seguintes equações:

$$F(\theta, x, y) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0.$$

De fato, por continuidade, se $v_{\theta_0} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor tangente a C e a $F(\theta_0, x, y) = 0$ em p, então para

parâmetros θ suficientemente próximos de θ_0, os vetores tangentes devem satisfazer $v_\theta \to v_{\theta_0}$ (veja Figura 3.2).

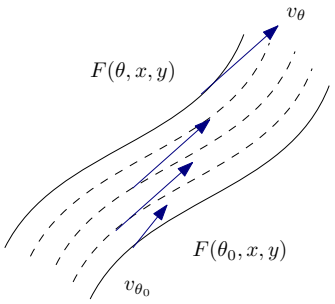


Figura 3.2: Caracterização de envelopes

Pela Lei de Snell (Exercício 1.6.2), o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Se todos os feixes de raio partem horizontalmente à uma distância d à esquerda da origem, a distância percorrida por um raio de luz até o ponto (x, y) em um raio refletido será

$$\ell(\theta, x, y) = d + \cos\theta + \left[(x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pelo princípio de Fermat (Exemplo 1.14), a trajetória de tal raio deve ser minimizada dentre todas as possíveis, portanto:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\theta, x, y) = 0. \tag{3.1}$$

Assim, os raios refletidos formam uma família de curvas e, pelo argumento acima, a cáustica de tal feixe será determinada por (3.1) e

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}(\theta, x, y) = 0.$$

Segue que $\ell(\theta, x, y)$ pode ser interpretada como uma deformação da variável de estados θ e dos controles (x, y). Pelo Teorema de Thom, se trata de uma catástrofe do tipo cúspide.

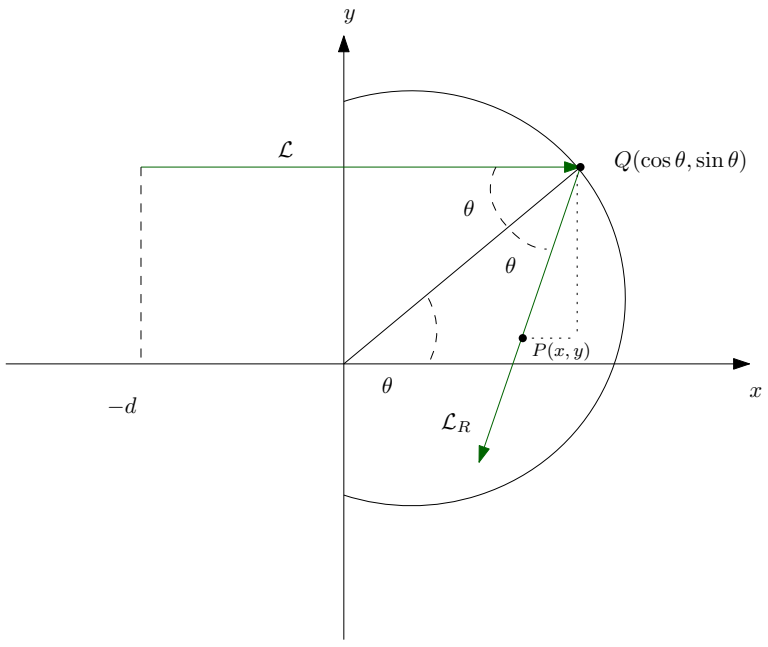


Figura 3.3: Distância percorrida pelo raio e sua reflexão

Com efeito, a análise qualitativa do sistema não envolve exatamente uma energia potencial, mas sim um princípio variacional mais amplo, como discutido na Seção 1.2. Para concluir, a situação é totalmente análoga para o caso de um feixe de luz no espaço que ainda seja paralelo a um dos eixos. Nesse caso, a caústica é encontrada por meio da interseção do cilindro com um plano horizontal. Ademais, em $\mathbb{R}^3$ as cáusticas são superfícies e para contextos estruturalmente estáveis, elas podem ser somente do tipo dobra, cúspide, ou seções de rabos de andorinha e hiperbólicas e elípticas umbílicas. De fato, nesse caso as cáusticas são completamente classificadas (veja [1]).

3.2 Estruturas Elásticas

Muitas estruturas físicas estudadas pela Engenharia possuem uma natureza elástica, considerando-se as devidas proporções, similar ao de cordas. Essas construções estão sujeitas a intempéries da natureza e, principalmente, desgastes ocasionados por forças que atuam sobre elas. Supondo que esses sistemas são governados por uma energia potencial, tais situações devem representar catástrofes. Nessa seção, discutiremos dois modelos de estruturas elásticas e sua formulação em termos da Teoria de Catástrofes. As referências seguidas são [16, Chapter 5] e [15, Chapter 13].

Arco de Euler

Considere dois arames rígido de comprimento unitário conectados em uma de suas extremidades de maneira que determinam o mesmo ângulo com relação à horizontal. No ponto em que estão conectados, um peso α é pendurado e uma corda é adicionada de maneira a conectar as duas extremidades e nas outras uma força de compressão β atua nos materiais.

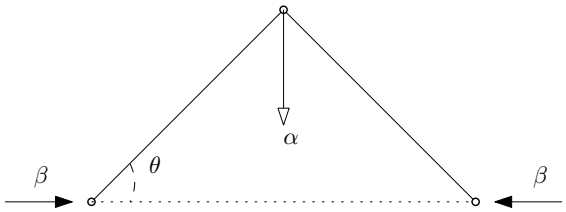


Figura 3.4: Arco de Euler

Note que se as forças β forem removidas, então o ângulo entre os arames tende a ser π. Veremos que o equilíbrio desse sistema depende dos controles α e β e seu estado é representado pelo ângulo θ. Assim sendo, uma vez que obtivermos uma expressão para a energia do sistema, poderemos concluir que ele é uma catástrofe do tipo cúspide. Quando uma das forças possui uma intensidade alta, ocasiona uma mudança repentina da posição θ, que pode ser causada pelo próprio rompimento da estrutura (peso α) ou uma rotação repentina de uma das barras (força compressiva β). Esses são exemplos de estados de discontinuidade.

- Os dois arames podem ser considerados como somente um seguimento tensionado por uma corda a um ângulo de 2θ e, de acordo com a Lei de Hooke para energia elástica, se o coeficiente do material é μ, a energia potencial correspondente é $\mu 2\theta$.

- A energia do peso α é sua energia potencial à altura de $\sin\theta$, visto que o os fios possuem comprimento unitário.

- Por fim, as duas forças correspondentes aos itens acima são equilibradas com as da base cujo trabalho para encurvar as estruturas até o ponto no qual se localiza α é quantificado por $2\beta\cos\theta$.

- A energia total do sistema é

$$V(\theta) = 2\mu\theta^2 + \alpha \sin\theta - 2\beta\cos\theta.$$

Modelo de Augusti

Uma situação similar é a seguinte. Uma estrutura única de comprimento unitário é fixada a um ponto em de suas extremidades enquanto sobre a outra cargas m são adicionadas. Além disso, ela é apoiada ou amortecida com relação a base por meio de uma mola e sua posição é identificado por meio do ângulo com o eixo vertical. Quando não há a suspensão de uma carga ou peso m, podemos supor (idealmente) que a carga está na posição vertical. Imperfeições de construção poderiam alterar essa condição, o que adicionaria uma distensão θ_0 de equilíbrio da barra, mas a análise seria essencialmente a mesma.

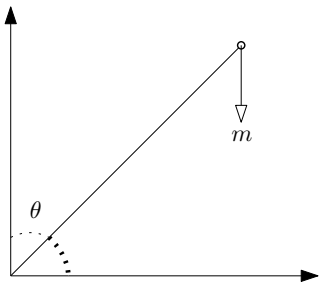


Figura 3.5: Arco de Euler

- Pela Lei de Hooke, a energia elástica é $1/2\mu\theta^2$.
- A massa se encontra a uma altura $\cos\theta$ e então sua energia potencial é $mg\cos\theta$.
- A energia total do sistema é $V(\theta) = \frac{1}{2}\mu\theta^2 + mg\cos\theta$.

A conclusão imediata seria de supor que os parâmetros de controle são a massa m e o coeficiente μ, o que teria correspondência em algumas aplicações, visto que o coeficiente pode sofrer alterações de acordo com temperatura, desgaste e outros fatores. Uma situação não plausível em um contexto real seria supor a gravidade como um estado variável. De toda maneira, é razoável admitir que apenas a carga sofre variações e obtemos uma catástrofe do tipo dobra. No entanto, nosso contexto geral permite indentificá-la como uma seção transversal da catástrofe cúspide com parâmetros de controle (m, μ).

Duas situações mais gerais podem ser analisadas. Primeiro, a chamada *Euler strut*, em que um formato mais geral é permitido para a barra e seus pontos são parametrizados por $(s, f(s))$ (veja o diagrama à esquerda na Figura 3.6). A conclusão é que se trata de uma catástrofe do tipo cúspide e quando as bases estão fixadas, representa uma situação muito similar a de uma ponto. Segundo, ao modelo de Augusti poderíamos anexar uma outra barra, cuja posição é representada pelo ângulo ϕ. Nesse caso, temos duas variáveis de estado e, portanto, o sistema deve ser descrito por catástrofes de dimensão mais alta.

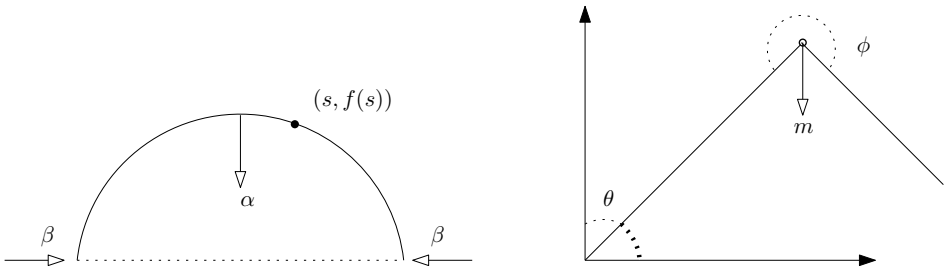


Figura 3.6: Arco de Euler

3.3 Termodinâmica

Considere um gás ideal puro em um cilindro equipado com um pistão, de maneira que é possível alterar a pressão interna relacionada ao gás. Suponha ainda que tal cilindro admite fluxo de calor em sua superfície e está em um recipiente isolado que não possui perturbações de fatores externos. Vimos anteriormente que a transição de fase de gases e líquidos é um fenômenos discontínuo e nessa seção formalizaremos um pouco mais essa afirmação, estudando a relação entre os parâmetros durante esse processo.

A lei que governa o fenômenos acima envolve três parâmetros: o volume V, a pressão P e a temperatura T. Esses parâmetros são relacionados pela equação de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = kT, \tag{3.2}$$

onde α, β, k são constantes. Para analisar esse fenômeno do ponto de vista da teoria de potenciais, introduzimos a energia livre:

$$F = E - TS,$$

onde E é a energia interna e S a entropia, ambos do cilindro contendo o gás. Adotamos o seguinte *Princípio da Energia Mínima de Gibbs*:

> *Existe uma função $G = G(V, P, T)$ tal que se $G_{P,T} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo dentre todas as variáveis de controle P e T para um determinado ponto (P_0, T_0), então o sistema está em um estado de equilíbrio em (P_0, T_0).*

Pela relação entre as expressões da energia livre, pressão e volume, a entropia é muitas vezes chamada de *potencial termodinâmico*. Agora, espera-se que a Teoria de Catástrofes determinará a natureza de tais estados de equilíbrio (estáveis e instáveis). Note que como a transição de fase provoca uma discontinuidade no volume, o modelo deve ser uma catástrofe. A função de Gibbs é tomada como $G = F + PV$. Portanto, os estados do sistema são determinados como o conjunto de bifurcação de G vista como uma deformação com variáveis de controle P e T e a variável de estado V. A estabilidade estrutural pode ser admitida à partir do fato de que pela equação (3.2) todos os estados do sistema estão caracterizados qualitativamente por G. Concluímos que o fenômeno é uma catástrofe do tipo cúspide. O mesmo resultado pode ser obtido por um cálculo direto (veja [11, pg. 116-118]).

Denotemos por P_τ o ponto correspondente à origem da catástrofe. A situação concreta é um pouco diferente do que prevê a catástrofe cúspide. Nesse momento, a mudança de volume (mantendo-se a temperatura constante) não provoca uma alteração significativa na pressão, o que justifica o formato do gráfico. Isso implica que uma relação entre pressão e volume mais próxima do fenômeno real seria representada pelo gráfico à direita na Figura 3.7. Consequentemente, uma superfície de estados de equilíbrio seria como na Figura 3.9.

Sobre a determinação de P_τ, temos o seguinte. De acordo com a formulação ideal, esse valor deve ser um estado de equilíbrio instável, onde há uma *disputa* pu divergência de equilíbrio. Consequentemente, pelo diagrama da cúspide, P_τ deve corresponder à origem do espaço de controle após uma mudança adequada de coordenadas. Uma outra maneira de determinar P_τ na prática é através da *Convenção Média de Maxwell* que estabelece que a transição de fase ocorre quando as regiões Ω_1 e Ω_2 na Figura 3.9 possuem a mesma área.

Um último comentário sobre o modelo ideal. A conclusão matemática da Teoria de Catástrofes não depende do Princípio de Maxwell, mas mesmo aqui ele pode ser verificado. Ele se traduz como o Princípio de Mínima Energia. Dessa maneira, não há incremento do potencial termodinâmico e os mínimos são estados de equilíbrio. Nem todas as propriedades fundamentais da cúspide propostas por Zeeman, são verificáveis nesse fenômeno e, por isso, a situação real é diferente.

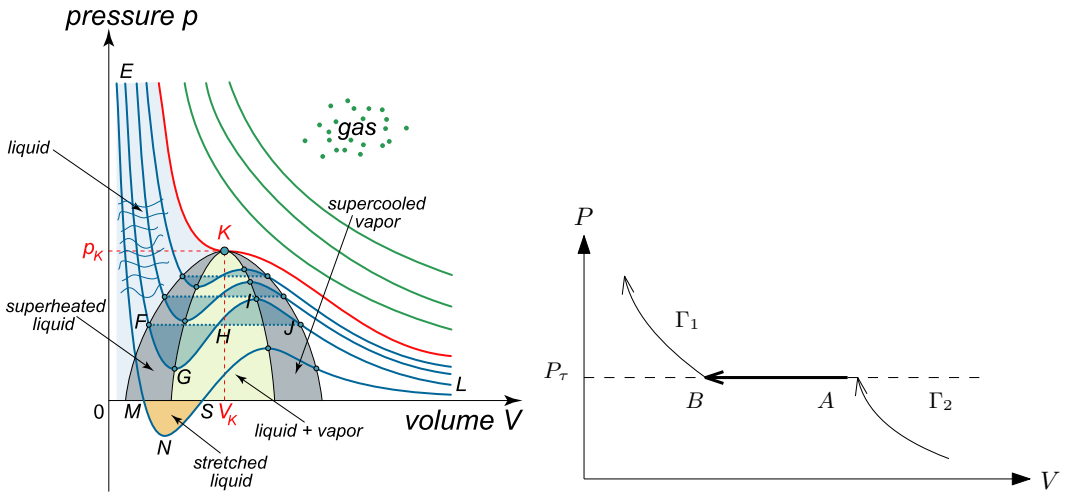


Figura 3.7: Relação entre pressão e volume para diferentes temperaturas e transição de fase

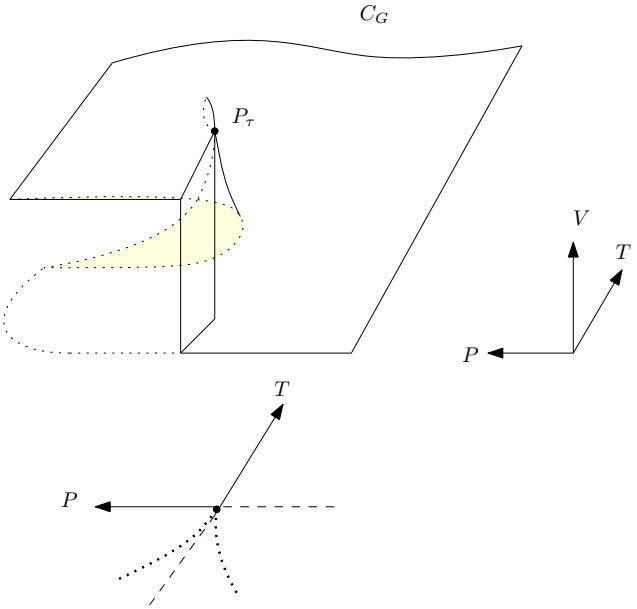


Figura 3.8: Estado intermediário líquido-vapor

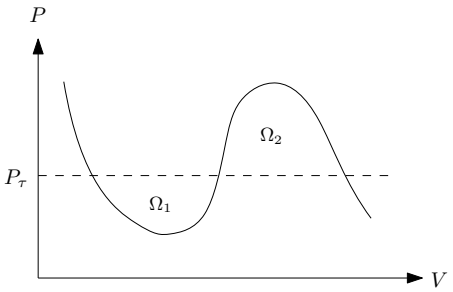


Figura 3.9: Estado intermediário líquido-vapor

- O ponto de ebulição, em geral, é fixado e a catástrofe é bem determinada. Assim, a histerese não é verificada.

- O Princípio da Energia Mínima estabele um potencial global para o sistema e, por isso mesmo, não há a presença do retardamento que faça com que os estados sofram transições suaves. Isso também

se relaciona com a 2ª Lei da Termodinâmica, que estabele que o fluxo de calor se dá de regiões mais quentes para as mais frias.

- Além disso, há uma determinação direta entre as três variáveis conhecendo-se as outras duas, de maneira que não ocorre bimodalidade.

3.4 Sistemas Estelares

Como introduzimos no Exemplo 1.17, as estrelas são formadas por diversos gases que se encontram no chamado equilíbrio hidrostático. Quando o combustível da estrela é completamente usado, formado principalmente por hidrogênio, esse equilíbrio é rompido e situações diversas podem ocorrer, entre elas a formação de buracos negros e a formação de novas estrelas. Essa é uma situação de catástrofe que pode ser descrita usando as singularidades anteriores. Alertamos para o fato de que essa formulação não garante a previsbilidade completa do evento e seu grande interesse é a possibilidade de uma nova descrição do fenômeno. As referências são [4], [9], and [5].

Equilíbrio Hidrostático

Considere uma região preenchida por gases cuja densidade $\rho(r)$ depende do raio r e uma partícula de prova de massa dm ocupando uma zona de área superficial A e volume $dV = dr$. Tal partícula está sujeita a duas forças: a grafitacional dF_g em direção ao centro, onde se concentra a *densidade central*, e uma força dF_p apontando para fora que é exercida pela pressão dos gases (veja a Figura 3.10).

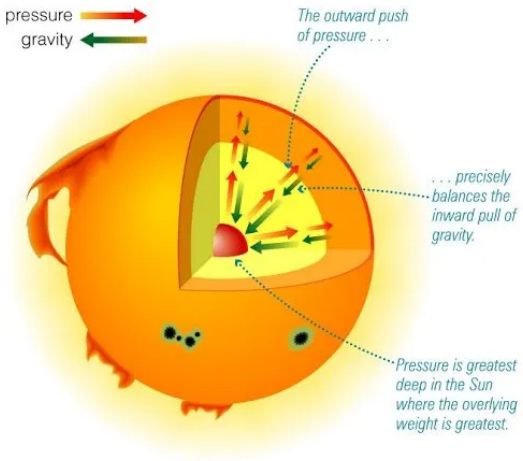


Figura 3.10: Equilíbrio Hidrostático em um Estrela

A força relacionada é a resultante de duas componentes relacionadas ao raio. Então,

$$dF_g = \frac{G\rho(r)AM(r)dr}{r^2}.$$

Relembre que densidade é uma razão entre massa e volume e este último é infinitesimalmente dado por drA, isso implica que $dm = \rho(r)Adr$. Se P_r é a pressão interna sobre a zona, então $P(r + dr)$ é a pressão em sua parte superior e vale que

$$F_P = \Delta(P)A = P(r + dr)A - P(r)A.$$

Para r suficientemente pequeno essa expressão resulta em

$$F_P = -\frac{dP}{dr}drA.$$

O *equilíbrio hidrostático* é quando as forças dF_G e dF_P possuem a mesma intensidade e, portanto,

$$dF_G = dF_P \Longrightarrow \frac{dP}{dr}drA = \frac{G\rho(r)AM(r)dr}{r^2} \Longrightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{G\rho(r)M(r)}{r^2}. \tag{3.3}$$

Concluímos que o sistema possui três variáveis e, supondo que o sistema seja estruturalmente estável, poderemos aplicar a Teoria de Catástrofes em sua análise.

Configuração Geral

Após a queima de todo seu hidrogênio em hélio, uma estrela entra no estado de anã branca, ou *white dwarf*. Esses objetos possuem são altamente massivos e estão um estado degenerado, o que significa que a pressão termodinâmica é maior. Em outras palavras, é um estado que caminha para a catástrofe. O aumento de sua massa M afeta o equilíbrio hidrostático e, de acordo com o *limite de Chandrasekhar*, que é $M = 1,4M_0$, a estrela sofre um colapso gravitacional e se transforma em estrelas de nêutrons, ou *neutron stars*. Esses objetos são caracterizados por possuírem carga elétrica muito baixa e alta densidade. Em caso de haver massa suficiente, ela se colapsaria diretamente a um buraco negro. O limite para esse segundo tipo de colapso é cerca de 1,5 a 3 vezes a massa solar M_0. O gráfico abaixo, já exibido anteriormente, mostra a relação desses limites com a densidade central ρ_0 da estrela.

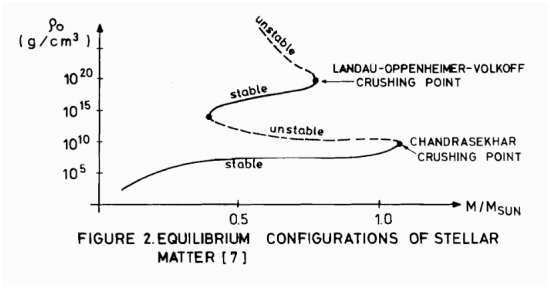


Figura 3.11: Estados de equilíbrio de uma estrela com parâmetros massa e densidade

Uma vez que esses colapsos devem corresponder a catástrofes ou pontos de discontinuidade na cúspide e, além disso, representam eventos sequenciais do colapso da estrela, teríamos dois diagrama sobrepostos (veja a Figura 3.12). Deve-se observar que as regiões entre as superfícies de estado não são fisicamente verificadas e se trata apenas de um possível modelo teórico. Por exemplo, um diagrama como esse estaria prevendo transições suaves entre estados gerados somente após colapsos, o que não se verifica na realidade. Isso se deve ao fato de que as equações físicas exatas que regem tal movimento não são em geral de fácil determinação e envolvem outros fatores. Na sequência apresentamos algumas ideias de como isso ocorre.

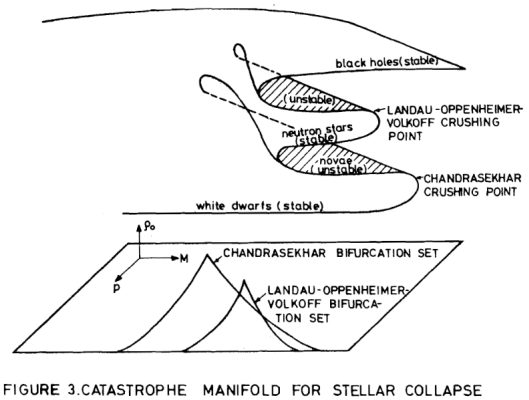


Figura 3.12: Sobreposição de Catástrofes Estelares

Conclusão Alternativa

Um problema relativo à formulação anterior é que estamos supondo que associado ao equilíbrio hidrostático há um potencial associado e que o sistema descrito pela equação (3.3) consiste de uma deformação a 2 parâmetros de uma variável de estados. Uma formulação alternativa, com base numa expressão explícita para o potencial, sob as hipóteses anteriores, a uma catástrofe do tipo dobra. Para fixar, convencionamos que:

- A estrela possui uma simetria radial, ou seja, as grandezas podem ser descritas pelo parâmetro r.
- A estrela forma um sistema adiabático, isto é, não há troca de calor com o meio externo.
- A estrela está um equilíbrio hidrostático.

Formalmente, dizemos que o sistema está em estado de equilíbrio dinâmico radial e não linear. Ainda, desconsidera-se a influência de campos magnéticos e efeitos relativísticos, de maneira que a análise é pelo viés da hidrodinâmica Newtoniana. Os autores em [5] apresentam a seguinte expressão para a energia do sistema:

$$E(r) = \int_0^M \left\{ U - \frac{Gm}{r} \right\} dm,$$

onde M é massa total, m a massa variável, $r = r(m)$ a posição radial (visto que estamos no modelo esférico), G a constante gravitacional e $U = (V(r, \dot{r}), S(m), X(m))$ a energia interna que depende do volume V e das entropias associadas $S(m)$ e $X(m)$. Portanto, a condição de equilíbrio se traduz em minimizar a energia acima. O estado inicial do sistema é descrito pelas variáveis com subíndice 0, por exemplo, $E_0(r_0)$ é a energia inicial no ponto inicial r_0. A perturbação é introduzida por uma função

$$r(m) = r_0(m)(1 + \xi(m)).$$

Essa perturbação pode ocorrer pelas mudanças de fase do hidrogênio, perda de massa e mudanças na entropia do sistema. Isso resulta em um funcional de energia da forma

$$E(r) = E(r_0) + E^1 z + E^2 z^2 + \dots,$$

onde $z = R - R_0/R_0$ refere-se à mudança do raio total da estrela. Os primeiros funcionais se referem às condições de equilíbrio hidrostático e da oscilação adiabática. O que se precisa determinar é a função potencial que está sendo deformada e então concluir que $E(r)$ é uma deformação. Dado isso, um teorema mais geral da teoria, dirá que $E(r)$ é uma deformação versal. Por uma análise do grau dos monômios, ela estará na classificação de Thom. Vale que $E_0(r) = E_0(r_0) + E_0^3 z^3$ e então $E(r)$ é a deformação versal de z^4, que define uma catástrofe do tipo dobra.

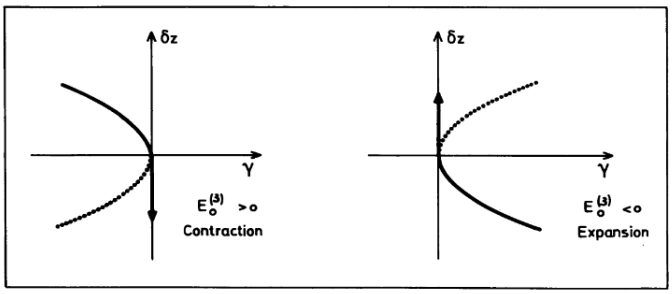


Figura 3.13: Catástrofe Dobra de um Sistema Estelar

Observação 3.1. Isso pode sugerir que a configuração geral da última seção permite englobar outros parâmetros a um sistema estelar, eventualmente desconsiderados em outras aplicações. Note ainda que a catástrofe do tipo dobra já aparece no diagrama 1.3. Isso implicaria que a catástrofe, sob hipóteses razoáveis, é suficientemente descrita pela densidade central e a massa.

Uma catástrofe do tipo dobra também é encontrada na análise desenvolvida em [9] de um sistema composto por uma estrela central massiva e outras estrelas de massa muito menor. Nesse caso, o diagrama corresponde corresponde a temperatura e densidade.

3.5 Ciências Sociais e as Críticas

> *Either starting from known scientific laws (from Mechanics or Physics) you insert the catastrophe theory formalism (eventually modified) as a result of these laws: this is the physical way. Or, starting from a poorly understood experimental morphology, one postulates* ***a priori*** *the validity of the catastrophe formalism, and one tries to reconstruct the underlying dynamics which generates this morphology: this is the metaphysical way. Needless to say, the second way seems to me more promising than the first, if less secure.*
>
> Thom, The two-fold way of catastrophe theory, 1976.

Não demorou muito para que a Teoria de Catástrofes fosse relacionada com diversas áreas das Ciências Sociais e Psicologia. De fato, além do peso do nome de seu fundador, René Thom, o renomado matemático Christopher Zeeman se dedicou aos aspectos teóricos com vistas às aplicações da teoria. São exemplos sua participação programa de televisão e a publicação de artigos de divulgação em revistas renomadas como [21]. Veja também [16, Chapter 6]. Ao mesmo passo, artigos com severas críticas ao programa da teoria foram feitas. Vamos dar um exemplo de como a formulação da teoria poderia explicar um fenômeno de conflito entre países.

Suponha que há dois parâmetros que decidem o nível de militarização M ou agressividade de um país: a ameaça A e os custos C. Essas quantidades, conforme os autores, poderiam ser a resultante de otimizar a opinião majoritária da sociedade, em suas parcelas civil, militar e política. A quantificação de cada uma poderia ser os custos financeiros, políticos, industriais para C, para A o nível de relações e trocas comerciais com outros países e a militarização, a postura agressiva diplomática e o investimento na indústria militar. Vamos analisar algumas situações de acordo com os caminhos em 2.3.

1. **Caminhos 1 e 2**: Há um aumento dos custos e uma diminuição da ameaça para o caminho 1 e, consequentemente, nenhuma mudança esperada. Isso poderia corresponder a uma situação em que há um conflito em curso mas não há uma escalada. No caminho 2, há uma diminuição da ameaça e os custos permanecem estáveis. Essa seria uma situação de paz.

2. **Caminhos 3 e 4**: Representam estados de aumento de custos e das ameaças, mas à partir de estratégias adotadas de maneira distintas, visto que são caminhos que se formam em locais diferentes. Em um dado momento, a situação tende a um aumento significativo da militarização, como uma declaração aberta de guerra, ou então uma diminuição, que poderia representar uma declaração inesperada de cessar-fogo. Um caso representativo seria a crise dos mísseis, em que os EUA adotaram desde o início uma postura agressiva que resultou na retirada (caminho 3), ou uma escalada da URSS que estava com uma agressividade baixa desde o início mas poderia decidir pela guerra.

3. **Caminhos 5 e 6**: O caminho 5 representa um caso em que a ameaça aumenta e o custo se encontra baixo, isso resulta no aumento da militarização, mas após um período a guerra se torna inviável e uma postura mais branda toma lugar. Por exemplo, a invasão dos EUA ao Vietnã. O caminho 6 representa um alto custo e uma ameaça crescentemente baixa. Posteriormente, a ameaça cresce de

uma maneira que a declaração, inesperada, é dada. Como exemplo, as invasões alemãs da Bélgica e da Polônia em 1914 e 1939, respectivamente. Essas operações foram precedidas de uma diplomacia razoavelmente estável com relação aos britânicos, mas prontamente escalou para o conflito.

Using the war model of Isnard and Zeeman as a paradigm, it is shown that many catastrophe theory models in social science possess serious weaknesses. The catastrophes supposedly account for real-life behavior, but actually are only a restatement of the fact that discontinuities exist. No deep mathematical results are actually used. The hypotheses are ambiguous or far-fetched. In addition, Thom'stheorem, the mathematical centerpiece of applied catastrophe theory, is inherently uninformative for applications. The theory is helpful on neither the qualitative nor the quantitative level. Finally, better and simpler mathematical tools exist.

Zahler-Sussman, Nature, 1977.

Algumas das críticas são as seguintes (veja, por exemplo, [19] e [10]).

- As conclusões dos teoremas envolvem as próprias hipóteses, de maneira que a classificação de *formas* estaria como hipótese.
- Mais geralmente, há imprecisões da formulação dos potenciais e variáveis envolvidos.
- Localmente, todas as formas são equivalentes, então as conclusões não captam o comportamento qualitativo dos fenômenos.
- As conclusões são erradas e existem descrições mais simples e naturais.

Por que então tantos cientistas e pesquisadores se renderam à teoria?

- Há um prestígio e ideia da precisão e exatidão das Ciências Exatas, em particlar, de matemáticos renomados como Thom e Zeeman.
- Argumentos de autoridade pelo uso de termos técnicos.
- A falta de uma formulação precisa dificulta, inclusive, ter o que criticar.
- A proposta seria extremamente útil e poderosa, de maneira que qualquer reação pareceria pouco razoável.

Algumas contra-críticas

- A análise de fenômenos à luz da teoria, não é estabelecida em forma de teoremas e conclusções lógicas. Mesmo que isso pareça ofuscado pelo estilo de escrita de certos autores.
- Ao contrário, visa uma descrição alternativa de um modelo que tenta se aproximar da realidade. Por isso, pode conter divergências com experimentos reais.
- A conclusão das formas é incoerente, visto que o teorema classifica as singularidades e as formas obtidas daí. Isso implica que existem formas distintas e, portanto, comportamentos possíveis variados.

Praticamente, isso marcou o fim dos esforços para que a Teoria das Catástrofes fosse aplicada em outras áreas, ao passo que a Teoria de Singularidades crescia e se afastava dessa tendência. De fato, as ambições programáticas também não se reveleram tão promissoras quanto se acreditava.

Últimas Observações

- O programa de Thom tinha um caráter bastante universalista e, de fato, o tema de discontinuidades, instabilidades, ou mudanças qualitativas significativas, remontam à filosofia grega passando inclusive pelo Materialismo Dialético.
- Mesmo que originalmente tinha um aspecto voltado para questões da biologia, as catástrofes tentavam entender e classificar todas possíveis formas da natureza, o que Thom chamou de *morfogênese*, e descrever qualitativamente como esse processo ocorre com discontinuidades sendo formadas e destruídas.
- Assim, em favor da teoria, pode-se advogar que ela seja mais uma filosofia, uma linguagem científica, do que uma teoria científica.

> *There seems to be a time scale in all natural processes beyond which structural stability and calculability become incompatible. In planetary mechanics this scale is of such an extent that the incompatibility is not evident, whereas in quantum mechanics it is so short that the incompatibility is immediately felt, and today the physicist sacrifices structural stability for computability. I hope that he will not have cause to regret this choice.*
>
> René Thom, Structural Stability and Morphogenesis, 1972.

Aula 4

Determinação Finita

The analysis of the conditions for a map-germ to be finitely determined and of the degree of determinacy involves the most important of the local aspects of singularity theory.

C.T.C. Wall, Finite Determinacy of Smooth Map Germs, 1981.

Nessa última parte, introduzimos o conceito de *determinação finita* e dois importantes resultados relativos à classificação de singularidades de funções e de germes do plano no plano. Essa definição formaliza matematicamente muitas das ideias apresentadas anteriormente.

4.1 Teorema de Arnold

Vimos que a propriedade de um fenômeno manter suas propriedades qualitativas quando perturbado sob certos limites se chama estabilidade estrutural, que é traduzida em linguagem matemática por *deformação versal*. Germes que admitem uma deformação dessa forma são muito especiais e agora retraçamos a história da teoria de um outro ponto de vista. Mais especificamente, estamos interessados em germes de singularidades tais que as $\mathcal{R}$-órbitas contém todas suas perturbações de ordem alta. Isso permitirá trazer o contexto de espaços de dimensão infinita para espaços de dimensão finita.

Definição 4.1. *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. O espaço tangente estendido à órbita de f em $C^\infty(n)$, denotado por $L\mathcal{R}_e.f$, é definido como o ideal*

$$J_f := \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathcal{E}_n$$

e o espaço tangente, denotado por $L\mathcal{R}.f$, é definido como

$$J_f \cdot \mathfrak{m}_n \subset \mathcal{E}_n,$$

onde $\mathfrak{m}_n$ é o único ideal maxima de $\mathcal{E}_n$.

Para entender a motivação da definição acima, enunciamos primeiramente dois lemas.

Lema 4.2 (Hadamard)**.** *Seja $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}_{n+k}$ o ideal dos germes tais que $f_{|\,\mathbb{R}^n \times 0} = 0$. Então $\mathfrak{m}_k$ é gerado pelas funções coordenadas y_i, onde as coordenadas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ são $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$.*

Esquema. Temos que

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,ty)dt = \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f(x,ty)}{\partial x_i}.y_i dt.$$

□

Lema 4.3. *Seja G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade M e suponha que as órbitas sejam subvariedades mergulhadas. Então, o mapa $\phi_x : G \longrightarrow G.x$ é uma submersão. Em particular, $T_x(G \cdot x) = (d\phi_x)_e(T_eG)$.*

Demonstração. Mostraremos que o posto de $(d\phi_x)_h$ é constante ao longo de $h \in G$. Fixe h, e defina os seguintes difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \Psi_h : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hg \\ \phi_h : M &\longrightarrow M \\ y &\longmapsto h.y \end{aligned}$$

Segue que $\phi_h^{-1} \circ \phi_x = \phi_x \circ \psi_h^{-1}$. Para cada $g \in G$, obtemos que:

$$(d\phi_h^{-1})_{h^{-1}gx} \circ d\phi_x(T_gG) = (d\phi_x)_{h^{-1}gx} \circ d\psi_h^{-1}(T_gG).$$

Fazendo $g = e$ e considerando que $d\psi_h^{-1}(T_gG) = T_{h^{-1}}G$, concluímos que a dimensão deste último espaço é igual a dimensão de $(d\phi_x)_e(T_eG)$. Como h é arbitrário, segue a afirmação. Por outro lado, como ϕ_x é sobrejetora, sua imagem é não vazia e pelo Teorema de Sard, deve existir $g \in G$ sobre o qual sua derivada é sobrejetiva, propriedade esta transferida para todo o grupo. □

Motivação da Definição. Gostaríamos de definir uma estrutura análoga ao espaço tangente de uma órbita. Como motivação, seja uma curva $\gamma^{-1} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$, isto é, o germe da identidade. Considerando o resultado acima que permite obter o espaço tangente por meio do mapa $h \mapsto f \circ h^{-1}$ e as derivadas direcionais do caso Euclideano, podemos definir o vetor tangente à órbita $\mathcal{R} \cdot f$ em f como a derivada em $t = 0$ da composta $f \circ \gamma(t)$, que resulta em um novo germe de $\mathcal{E}_n$. Escreva

$$\gamma(t)(x) = (x_1 + th_1(x,t), \ldots, x_n + th_n(x,t)).$$

Temos que o vetor tangente é

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i(t,x).$$

Como $\gamma(0)(x) = x$ para todo x, segue que $h_i(0,0) = 0$ e então, pelo Lema de Hadamard, $h_i(0,x) \in \mathfrak{m}_n$. □

Definição 4.4.

1. *A $\mathcal{R}_e$-codimensão é definida como $\mathcal{R}_e - \mathrm{codim} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$.*
2. *A $\mathcal{R}$-codimensão é definida como $\mathcal{R} - \mathrm{codim} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n \cdot J_f}$.*

Definição 4.5. *Seja $f \in \mathcal{E}_n$.*

1. *Denotamos por $j^k(f)$ o k-jato de f na origem, ou seja, o polinômio de Taylor de f centrado na origem truncado até ordem k.*
2. *O espaço de todos os possíveis k-jatos é denotado por $\mathcal{J}^k(n)$.*
3. *Dizemos que f é finitamente determinado se existe um inteiro k tal que $f \sim_{\mathcal{R}} g$ para todo $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(f) = j^k(g)$.*
4. *Dizemos que f é k-finitamente determinado se f é finitamente determinado e k é o menor inteiro satisfazendo a condição acima.*

Observação 4.6. É possível mostrar que um germe é finitamente determinado se, e somente se, admite uma deformação versal. Portanto, em algumas das equações que obtemos anteriormente, a hipótese de estruturalmente estável poderia ser descartada, pois se poderia verificar que se tratava de um germe finitamente determinado sendo deformado. Mas vimos que há exemplos para os quais uma função potencial explícita não é conhecida.

Teorema 4.7 (Condições)**.** *Seja $f \in \mathcal{E}_n$.*

1. *Se $\mathfrak{m}_n^k \subset \mathfrak{m}_n \cdot J_f = L\mathcal{R}.f$, então f é k-$\mathcal{R}$-determinado.*
2. *Se f é k-finitamente determinado, então $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subset \mathfrak{m}_n \cdot J_f = L\mathcal{R}.f$.*

Exemplo 4.8. Singularidades de tipo Morse são 2-finitamente determinadas, o que recupera o clássico Lema de Morse.

Exemplo 4.9. Os germes $f(x,y) = x^2 + xy^4$ e $g(x,y) = x^3 + y^5$ são finitamente determinados como germes em $\mathcal{E}_2$, mas não em $\mathcal{E}_3$.

Proposição 4.10. *Um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é finitamente determinado se, e somente se, as suas codimensões são finitas.*

Dado $f \in \mathcal{E}_{n,m}$, temos o seguinte homomorfismo induzido:

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{E}_m &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ \phi &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

Lema 4.11. *Sejam $f, f' \in \mathcal{E}_n$ e $g, g' \in \mathcal{E}_{n,n}$. Suponha que $j^k(f) = j^k(f')$ e que $j^k(g) = j^k(g')$. Então, vale que*

$$\mathrm{Img}\left((f \circ g)^* - (f' \circ g')^*\right) \subset \mathfrak{m}_n^{k+1}.$$

Demonstração. Primeiro, observamos que

$$\begin{aligned} g, g' : (\mathbb{R}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ f, f' : (\mathbb{R}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ f \circ g, f' \circ g' : (\mathbb{F}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (f \circ g)^*, (f' \circ g')^* : \mathcal{E}_1 &\longrightarrow \mathcal{E}_n \end{aligned}$$

Agora, temos que:

$$(f \circ g)^* - (f' \circ g')^* = g^* \circ (f^* - f'^*) - (g^* - g'^*) \circ f'^*.$$

Mas pela hipótese,

$$\begin{aligned} \mathrm{Img}\,(f^* - f'^*) &\subset \mathfrak{m}_n^{k+1} \\ \mathrm{Img}\,(g^* - g'^*) &\subset \mathfrak{m}_n^{k+1} \end{aligned}$$

O resultado segue considerando-se as expansões de Taylor de g e de f'. □

Corolário 4.12. *Sejam $f \in \mathcal{E}_n$ e $g \in \mathcal{E}_{n,n}$. Então, vale que*

$$j^k(f \circ g) = j^k\left(j^k(f) \circ j^k(g)\right).$$

Demonstração. No lema anterior, faça $g' = j^k(g)$ e $f' = j^k(f)$. O resultado afirma que

$$\mathrm{Img}\left((f \circ g)^* - (j^k(f) \circ j^k(g))^*\right) \subset \mathfrak{m}_n^{k+1}.$$

Agora, aplicamos a expressão acima para a função identidade em $\mathcal{E}_1$, o que nos leva a expressão do enunciado. □

Introduzimos uma definição mais para formular completamente a ação de $\mathcal{R}$ sobre germes finitamente determinados como uma ação de um grupo de Lie sobre uma variedade diferenciável.

Definição 4.13.

1. $\mathcal{R}_k = \left\{h \in \mathcal{R} : j^k(h) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\right\}$.
2. $\mathcal{R}_l^k = \mathcal{R}_l \,/\, \mathcal{R}_k$, *onde* $l < k$.
3. $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \,/\, \mathcal{R}_k$.

Proposição 4.14.

1. *O subconjunto* $\mathcal{R}_k$ *é um subgrupo normal de* $\mathcal{R}$.
2. *O quociente* $\mathcal{R}_l \,/\, \mathcal{R}_{k+1}$ *pode ser identificado com o espaço dos* k*-jatos dos difeomorfismos em* $\mathcal{R}^l$.
3. *A ação induzida abaixo é bem definida e é uma ação de um grupo de Lie sobre uma variedade diferenciável:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^k \times J^k(n) &\longrightarrow J^k(n) \\ (h, f) &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) \end{aligned}$$

Demonstração. Para a primeira afirmação, se $h \in \mathcal{R}_k$ e $g \in \mathcal{R}$, temos que:

$$j^k(g \circ h \circ g^{-1}) = j^k(j^k(g) \circ j^k(h) \circ j^k(g^{-1})) = j^k(g \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}\,.$$

Para a segunda afirmação, precisamos ver que cada classe $[h]$ no quociente é representada por um k-jato de difeomorfismo em $\mathcal{R}^l$. Basta tomar $g = j^k(h)$, daí segue que $g^{-1} \circ h \in \mathcal{R}_{k+1}$, ou seja, $[g] = [h]$. Para concluir, precisamos verificar que $\mathcal{R}^k$ é um grupo de Lie. Como $k-1$-jatos de difeomorfismos continuam sendo difeomorfismos, $\mathcal{R}^k \subset J^k(n,n)$ é o grupo de germes de aplicações polinomiais que são difeomorfismos. Para a independência dos representantes, se $[h] = [h']$, então $h^{-1} \circ h'^{-1} \in \mathcal{R}_k$. Consequentemente, temos que $j^k h^{-1} = (j^k h')^{-1} = j^k h'^{-1}$. □

Observação 4.15. Com as definições acima, um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é estruturalmente estável conforme a Definição 1.5 se, e somente se, sua $\mathcal{R}_e$-codimensão é igual a 0. Em outras palavras, se sua órbita contém um aberto em uma vizinhança de si próprio. Isso equivale a afirmar que f é de Morse.

Definição 4.16. *Seja* $f \in \mathcal{E}_n$ *finitamente determinado e* $F(x,u) = f_u(x)$ *sua deformação versal. Dizemos que* f *é simples se existe um número finito de* $\mathcal{R}$*-órbitas tal que todos os germes deformados* $f_u(x)$ *pertencem a uma dessas classes.*

Exemplo 4.17 (Germe não simples)**.** Seja $f_\lambda = xy(x-y)(x-\lambda y)$, onde $\lambda \in \mathbb{F}^*$. Afirmamos que f não define um germe simples. Com efeito, considere os k-jatos, com $k \geq 4$. Uma vizinhança de tais jatos contém as perturbações do parâmetro λ. Por outro lado, se houvesse um aberto contendo finitas órbitas, para uma quantidade não enumerável de parâmetros λ, esses germes seriam equivalentes. Mas é possível mostrar que esses germes são equivalentes se, e somente se, os parâmetros λ são os mesmos. Logo, há uma quantidade infinita de órbitas em qualquer vizinhança de um f_λ fixado.

Teorema 4.18 (Arnold)**.** *Seja* $f \in \mathfrak{m}_n^2$ *um germe simples e finitamente determinado. Então* f *é equivalente a uma, e somente uma, das singularidades abaixo a menos da soma por uma forma quadrática* $q(z)$*. Além disso, todo germe abaixo é simples.*

Tipo	**Forma Normal**	$\mathcal{R}_e - \text{codim}$
$A_k^{\pm}, k \geq 1$	$\pm x^{k+1} + q(z)$	k
$D_k^{\pm}, k \geq 4$	$x^2 y \pm y^{k-1} + q(z)$	k
$E_6^{\pm}$	$x^3 \pm y^4 + q(z)$	6
E_7	$x^3 + xy^3 + q(z)$	7
E_8	$x^3 + y^5 + q(z)$	8

4.2 Teorema de Whitney

Podemos dizer que os resultados mais importantes com relação à classificação de singularidades degeneradas de funções são os teoremas de Thom e de Arnold, que de certa maneira são equivalentes. Agora, apresentamos uma classificação feita por Whitney antes desses resultados para germes de aplicações do plano no plano. Para isso, introduzimos uma nova equivalência. Comentaremos ainda a *genericidade* de tais mapas.

O grupo de translações à esquerda, denotado por $\mathcal{L}$, consiste dos germes de difeomorfismos em $\mathcal{E}_{p,p}$. Sua ação sobre $\mathcal{E}_{n,p}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \times \mathcal{E}_{n,p} &\longmapsto \mathcal{E}_{n,p} \\ (\phi, f) &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

O grupo $\mathcal{A}$ é descrito por $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ e sua ação por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{E}_{n,p} &\longmapsto \mathcal{E}_{n,p} \\ (\psi, \phi, f) &\longmapsto \phi \circ f \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

Assim, $f, g \in \mathcal{E}_{n,p}$ são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, existem germes de difeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ em $\mathcal{R}$ e $\phi : (\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que

$$g = \phi \circ f \circ \psi^{-1}.$$

Exemplo 4.19. Como vimos na Seção 1.3, germes de imersões e submersões são $\mathcal{A}$-equivalentes às formas locais enunciadas.

Relembramos que os espaços tangentes das órbitas com relação aos grupos de Mather não são objetos *naturais* como no caso finito-dimensional. Por outro lado, eles são construídos com as mesmas motivações desse contexto. A finalidade principal é relacionar e caracterizar as propriedades dos germes de funções através de objetos e conjuntos que contenham informações infinitesimais. Motivaremos então as definições dos espaços tangentes e então as introduzimos. Os espaços de campos vetoriais são descritos como:

$$\begin{aligned} \Theta_n &= \{\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\,\mathbb{R}^n : \pi_1 \circ \xi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\} \simeq \mathcal{E}_n^n\,. \\ \Theta_p &= \{\eta : \mathbb{R}^p \longrightarrow T\,\mathbb{R}^p : \pi_1 \circ \eta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}\} \simeq \mathcal{E}_p^p\,. \end{aligned}$$

Nos interessa também o espaço de *campos vetoriais ao longo de* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$:

$$\Theta_F = \{\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\,\mathbb{R}^p : \pi_2 \circ \sigma = f\} \simeq \mathcal{E}_n^p\,.$$

Os campos vetoriais podem ser entendidos como tendo domínio e contradomínio igual ao espaço em questão:

$$\xi = (p, \xi(p)) \simeq \xi(p).$$

Por fim, defina:

$$\begin{aligned} \tau F : \Theta_n &\longrightarrow \Theta_f \\ \xi &\longmapsto dF \circ \xi \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \omega F : \Theta_p &\longrightarrow \Theta_f \\ \eta &\longmapsto \eta \circ F \end{aligned}$$

O mapa τF é um homomorfismo de módulos, mas ωF não necessariamente. Relembre que o grupo $\mathcal{L}$ age do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \times \mathcal{E}_{n,p} &\longrightarrow \mathcal{E}_{n,p} \\ (\phi, F) &\longmapsto \phi \circ F \end{aligned}$$

Considere $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que $\gamma(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ e que possui a seguinte forma:

$$\gamma(t)(x) = (x_1 + th_1(x,t), \ldots, x_p + th_p(x,t)),$$

onde $h_i(0,0) = 0$ para todo i. Como antes, é razoável obtermos os vetores tangentes da órbita $L\,\mathcal{L}.F$ como aqueles da forma $\frac{d}{dt}(\gamma \circ F)_{|t=0}$. Mais especificamente, temos que:

$$\gamma(t) \circ F(x) = \left(f^1 + th_1(F,t), \ldots, f^p + th_p(F,t)\right).$$

Derivando com relação a t, obtemos

$$\left(h_1(F(x),t) + t\frac{\partial h_1}{\partial t}(F(x),t), \ldots, h_p(F(x),t) + t\frac{\partial h_p}{\partial t}(F(x),t)\right).$$

Avaliando em $t = 0$:

$$(h_1(F(x),0), \ldots, h_p(F(x),0)),$$

onde $h_i(0,0) = 0$. Assim, o elemento acima pode ser interpretado como uma composição $h \circ F$, onde $h \in \mathfrak{m}_p\,\Theta_p$. Essas considerações nos levam às seguintes definições.

Definição 4.20. *Seja $F \in \mathcal{E}_{n,p}$, onde denotamos o i-ésimo vetor coluna da matriz Jacobiana de F por $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.*

1. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{R}$ é definido como:*

$$L\,\mathcal{R}.F = \tau F(\mathfrak{m}_n\,\Theta_n) = \left\{\sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} : \xi_i \in \mathfrak{m}_n\right\}.$$

2. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{L}$ é definido como:*

$$L\,\mathcal{L}.F = \omega F(\mathfrak{m}_p\,\Theta_p) = \{\eta \circ F : \eta \in \mathfrak{m}_p\,\Theta_p\}.$$

3. *O espaço tangente à órbita de F com relação ao grupo $\mathcal{A}$ é definido como o seguinte subconjunto de Θ_F:*

$$L\,\mathcal{A}.F = L\,\mathcal{R}.F + L\,\mathcal{L}.F.$$

Observação 4.21. Observe que como $L\,\mathcal{L}.f$ não é um submódulo, os elementos ali contidos não são suficientes para serem *geradores*. Em particular, contém em geral as constantes, mas isso não implica que gera todo o $\mathcal{E}_n$.

Para contornar o fato de $\omega F(\Theta_p)$ não ter estrutura de módulo, relembre o seguinte homomorfismo de anéis definido por $F : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$:

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{E}_p &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ g &\longmapsto g \circ F \end{aligned}$$

Agora, um elemento $\eta \in \Theta_p$ é da forma $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$, onde $\eta_i \in \mathcal{E}_p$. Se $g \in \mathcal{E}_p$, definimos a ação de $\mathcal{E}_p$ em Θ_F por:

$$g.\eta = F^*(g).\eta = (F^*(g)\eta_1, \ldots, F^*(g)\eta_p).$$

A expressão para o espaço tangente se vê consideravelmente mais complicada que para o grupo $\mathcal{R}$. Isso implica que estudar suas órbitas pode ser uma tarefa muito difícil. De fato, veremos que determiná-las no que tange ao seu *tamanho* foi um grande problema em Teoria de Singularidades.

Definição 4.22. *Seja $F = (f^1, \ldots, f^k) \in \mathcal{E}_{n,p}$.*

1. *Denotamos por $j^k(F)$ o k-jato de F na origem, ou seja, o mapa polinomial cujas funções coordenadas são os k-jatos das funções coordenadas de F:*

$$j^k(F) = \left(j^k f^1, \ldots, j^k f^p\right).$$

2. *O espaço de todos os possíveis k-jatos de germes de $\mathcal{E}_{n,p}$ é denotado por $\mathcal{J}^k(n,p)$.*

Definição 4.23. *As codimensões relativas ao grupo $\mathcal{A}$ são definidas como:*

1. $\mathcal{A} - \operatorname{codim}(F) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{m}_n \Theta_F}{L\mathcal{A}.F}$.

2. $\mathcal{A}_e - \operatorname{codim}(F) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\Theta_F}{L\mathcal{A}_e.F}$.

Observação 4.24. *A estrutura de $F^*(\mathcal{E}_p)$-módulo faz com que $L\mathcal{A}.F$ seja um submódulo e então o quociente acima faz sentido.*

Teorema 4.25 (Whitney)**.** *Seja $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$-codimensão menor ou igual a 2. Então F é $\mathcal{A}$-equivalente a uma das formas normais da tabela abaixo.*

Classe	**Forma Normal**	**$\mathcal{A}_e$-codimensão**	**Nome**
A_0	(x, y)	0	Difeo local
A_1	(x, y^2)	0	Dobra
A_2	$(x, y^3 + xy)$	0	Cúspide
A_2	$(x, y^3 + x^2y)$	1	Lábios (lips)
A_2	$(x, y^3 - x^2y)$	1	Bicos (beaks)
A_2	$(x, y^3 + x^3y)$	2	Ganso
A_3	$(x, y^4 + xy)$	1	Rabo de Andorinha (swallow taill)
A_3	$(x, y^4 + x^2y + y^5)$	2	Gaivota
A_4	$(x, y^5 + xy + y^7)$	2	Borboleta

Podemos concluir que os únicos germes estruturalmente estáveis com relação à $\mathcal{A}$-equivalência são do tipo dobra ou cúspide. Mais ainda, Whitney provou que o conjunto de tais órbitas é denso no espaço de germes $C^\infty(n,p)$. Em outras palavras, dobras e cúspides são *singularidades genéricas*. Isso permite a seguinte caracterização.

Corolário 4.26. *Seja $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com coposto igual a 1 e $\mathcal{A}_e$-codimensão menor ou igual a 2. Suponha ainda que $F = (x, g(x, y))$, onde $g \in \mathfrak{m}_2^2$. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *A origem é um ponto de dobra se, e somente se, $g_y(0,0) = 0$ e $g_{yy}(0,0) \neq 0$.*

2. *A origem é um ponto de cúspide se, e somente se, $g_y(0,0) = g_{yy}(0,0) = 0$ e $g_{xy}(0,0), g_{yyy}(0,0) \neq 0$.*

Demonstração. Note que pela condição sobre o 1-jato, a origem é de fato uma singularidade de f. Pelo Teorema de Whitney, existem germes de difeomorfismos $\phi, \psi : (\mathbb{F}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{F}^2, 0)$ tais que $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ tem uma das formas normais. Precisamos ver então que o comportamento das derivadas parciais da segunda função coordenada é o mesmo que as derivadas parciais de g. Para uma mudança na fonte, o comportamento é o mesmo, visto que são difeomorfismos. Então, simplificamos para analisar as derivadas parciais com relação a uma mudança na meta. Então, temos que $\psi^{-1} \circ f = (\psi_1^{-1}(x, g), \psi_2^{-1}(x, g))$ assume

uma das formas normais do enunciado. Ainda:

$$\begin{aligned}
\left(\psi_2^{-1}(x,g)\right)_y(0,0) &= (\psi_2^{-1})_y(0,0).g_y(0,0)\\
\left(\psi_2^{-1}(x,g)\right)_{yy}(0,0) &= (\psi_2^{-1})_{yy}(0,0).g_y(0,0) + (\psi_2^{-1})_y(0,0).g_{yy}(0,0)\\
\left(\psi_2^{-1}(x,g)\right)_{yx}(0,0) &= (\psi_2^{-1})_{yx}(0,0).g_y(0,0) + (\psi_2^{-1})_y(0,0).g_{yx}(0,0)\\
\left(\psi_2^{-1}(x,g)\right)_{yyy}(0,0) &= (\psi_2^{-1})_{yyy}(0,0).g_y(0,0) + (\psi_2^{-1})_{yy}(0,0).g_{yy}(0,0)\\
&\quad + (\psi_2^{-1})_{yy}(0,0).g_{yy}(0,0) + (\psi_2^{-1})_y(0,0).g_{yyy}(0,0)
\end{aligned}$$

Através de uma nova mudança (linear) de coordenadas, podemos supor a matriz Jacobiana de ψ^{-1} de tal modo que que $(\psi^{-2})_y(0,0) \neq 0$. Agora, pelas equações acima, temos que as nulidades e não nulidades das derivadas parciais da segunda função coordenada correspondem àquelas de g. Por fim, a conclusão segue verificando que pontos de cúspide e dobra são únicos que satisfazem as respectivas condições do enunciado. □

A motivação geométrica do estudo de singularidades $(\mathbb{R}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,0)$ é a seguinte. Localmente, podem ser vistas como singularidades da projeção de superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$ para o plano. O Teorema de Whitney implica, portanto, que as singularidades que ocorrem genericamente são dobras e cúspides e todas as outras se degeneram para estas.

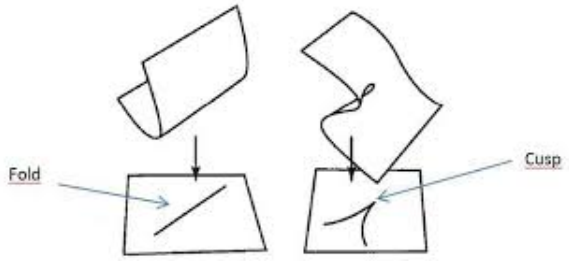


Figura 4.1: Projeções genéricas de superfícies no plano

4.3 Exercícios

Exercício 4.3.1. *Mostre que o conjunto $\mathcal{J}^k(n,p)$ é um espaço vetorial de dimensão finita e calcule-a.*

Exercício 4.3.2.

1. *O germe $f:(\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R},0)$ representado por $f(x) = \sum_i^n \pm x_i^2$ é 2-determinado.*
2. *O germe $f:(\mathbb{R}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{R},0)$ representado por $f(x,y) = x^2 + y^3$ é 3-determinado.*
3. *O germe $f:(\mathbb{R}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{R},0)$ representado por $f(x,y) = x^2 + xy$ é 2-finitamente determinado.*
4. *Os germes $f = x^2$ e $g = x^2y$ não são finitamente determinados em $\mathcal{E}_2$.*

Exercício 4.3.3. *Mostre que na definição de determinação finita podemos substituir a igualdade $j^k(f) = j^k(g)$ dos k-jatos pela $\mathcal{R}^k$-equivalência $j^k(f) \sim_{\mathcal{R}} j^k(g)$.*

Exercício 4.3.4. *Mostre que a $\mathcal{R}_e$-codimensão de $f \in \mathcal{E}_n$ é zero se, e somente se, f é de Morse.*

Exercício 4.3.5. *Sejam $F, G \in \mathcal{E}_{n,p}$. Mostre que se $F \sim_{\mathcal{A}} G$, então os germes $F^{-1}(0)$ e $G^{-1}(0)$ são difeomorfos.*

Exercício 4.3.6.

1. *Mostre que os germes* $F(x,y,z) = (0, x^2 - y^3)$ *e* $G(x,y,z) = (x - y, x - y)$ *não são* $\mathcal{A}$*-equivalentes.*

2. *Mostre que os germes de tipo difeomorfismo local, cúspide e dobra são dois-a-dois não* $\mathcal{A}$*-equivalentes.*

Exercício 4.3.7.

1. *Mostre que* $\mathcal{R}$*-equivalência implica* $\mathcal{A}$*-equivalência.*

2. *Dê um contra-exemplo para a recíproca do fato acima.*

Bibliografia

[1] M. V. Berry, *Waves and Thom's theorem*, Advances in Physics, 25 (1976), pp. 1–26.

[2] M. L. Boas, *Mathematical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons, 2006.

[3] A. Boutot, *Catastrophe theory and its critics*, Synthese, 96 (1993), pp. 167–200.

[4] J. L. Casti, *Catastrophe theory and the problem of stellar collapse*, (1974).

[5] J. Demaret, V. Dzuba, and J. Perdang, *The stellar dynamical catastrophe*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 70, p. 287 (1978), 70 (1978), p. 287.

[6] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, vol. 25 of Research Notes in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1979.

[7] R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, Dover Publications, Inc., New York, 1993. Reprint of the 1981 original.

[8] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.

[9] V. Gurzadyan, A. Kocharyan, and S. Matinyan, *Catastrophe theory and stellar systems*, Astrophysics (Engl. Transl.);(United States), 26 (1987).

[10] G. B. Kolata, *Catastrophe theory: the emperor has no clothes*, Science, 196 (1977), pp. 287–351.

[11] Y. C. Lu, *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. With a preface by Peter Hilton, Corrected reprint.

[12] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, vol. No. 61 of Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968.

[13] e. a. Nuño-Ballesteros, J.J, *Hypersurfaces: Algebraic methods and singularities*, CIMPA - Research School: Singularities and Aplications, 2022.

[14] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996. With an appendix by D. R. Olsen, S. R. Carter and A. Rockwood, Reprint of the 1978 original.

[15] ——, *Catastrophe theory and its applications*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996. With an appendix by D. R. Olsen, S. R. Carter and A. Rockwood, Reprint of the 1978 original.

[16] P. Saunders, *An Introduction to Catastrophe Theory*, Cambridge University Press, 1980.

[17] J. Sotomayor, *On Maurício M. Peixoto and the arrival of structural stability to Rio de Janeiro, 1955*, An. Acad. Brasil. Ciênc., 92 (2020), pp. e20191219, 6.

[18] M. Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[19] H. J. Sussmann and R. S. Zahler, *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: A critique*, Synthese, 37 (1978), pp. 117–216.

[20] J. M. T. Thompson and H. Leipholz, *Instabilities and catastrophes in science and engineering*, (1982).

[21] E. C. Zeeman, *Catastrophe theory*, Scientific American, 234 (1976), pp. 65–83.