

Introducción a los sistemas dinámicos: sistemas
dinámicos en dimensión uno.
EMALCA 2018

Pablo D. Carrasco¹

¹ICEx-UFMG, Avda. Presidente Antonio Carlos 6627, Belo Horizonte-MG,
BR31270-90

11 de enero de 2021

Índice general

Notación utilizada	1
Prefacio	1
I. Conceptos básicos en sistemas dinámicos	5
I.1. Introducción	5
I.2. Vocabulario	6
I.3. Método gráfico para iterar en el intervalo	8
I.4. Pozos y fuentes	10
I.5. Conjugación	11
II. Dinámica de homeomorfismos del círculo	15
II.1. El círculo	15
II.2. Teoría de Poincaré	16
II.2.1. Medidas regulares en espacios métricos	16
II.2.2. Medidas invariantes	18
II.2.3. El número de rotación	19
II.2.4. Número de rotación racional	21
II.2.5. Número de rotación irracional	22
II.3. Mapas expansores del círculo	25
II.3.1. Propiedades básicas: puntos periódicos y transitividad	25
II.3.2. Semi-conjugación con el shift.	27
II.3.3. El espacio de códigos	29
III. La familia cuadrática	31
III.1. Propiedades básicas	32
III.2. Ciclos atractores	35
III.2.1. El diagrama de bifurcación.	38
III.3. El caso $c \leq -2$	40
Ejercicios	42

Notación utilizada

- $\mathbb{R}$ son los números reales. $\mathbb{R}_{>0}$ son los números reales positivos.
- $\mathbb{Z}$ son los números enteros. $\mathbb{Z}_{>0}$ son los enteros positivos.
- $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0} \cup \{0\}$ son los números naturales.
- $\mathbb{Q}$ son los números racionales. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son los irracionales.
- $\mathbb{S}^1 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
- Si $f : X \rightarrow Y$ es una función e $x \in X$ denotaremos el valor que f toma en x indistintamente como fx o $f(x)$.

En lo que sigue X denota un espacio métrico (por ejemplo $\mathbb{R}$).

- $\mathcal{C}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$.
- $\mathcal{C}_c(X) = \{\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \mid \exists K \subset X \text{ compacto con } \phi(x) = 0 \ \forall x \notin K\}$.
- $\text{Homeo}(X)$ son los homeomorfismos de X . $\text{End}(M)$ es el conjunto de las aplicaciones continuas de M en M .
- $\text{Homeo}^+(X)$ consiste en los homeomorfismos de X que preservan orden. Aquí asumimos $X \subset \mathbb{R}$ o $X \subset \mathbb{S}^1$.
- $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable y con derivada continua}\}$. Aquí asumimos $X \subset \mathbb{R}$ o $X \subset \mathbb{S}^1$.
- Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, definimos $\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in X} \{|f(x)|\}$.
- Si (f_n) es una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ también acotada, escribimos $f_n \rightrightarrows f$ si (f_n) converge uniformemente a f , es decir si $\|f_n - f\|_{C^0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Prefacio

Las presentes notas contienen una versión ampliada del minicurso que proferí en la EMALCA 2018, en la ciudad de San Miguel, El Salvador. La idea del curso fue introducir estudiantes de mediados de carrera en matemáticas a las nociones básicas de sistemas dinámicos. Dado que los participantes en este evento provenían de varios países, y por ende, con distintos conocimientos previos, intenté presentar algunos elementos simples in hacer uso de maquinaria muy sofisticada. Todo lo que fue cubierto puede entenderse con un curso básico de análisis real (el contenido de libros como [8], [1] o [4] es mucho más que suficiente), o mismo con un curso avanzado de cálculo, complementado con algunas nociones extra (particularmente, la de espacio métrico).

Por otro lado, intenté mostrar algunos métodos que pueden ser generalizados a situaciones más complejas, lo que naturalmente lleva a exigir un mayor trabajo por parte del estudiante. Creo, no obstante, que al ser un curso introductorio resulta más provechoso intentar mostrar métodos generalizables para transmitir una mejor idea del objeto y forma de trabajo de la disciplina.

El curso se centra en dinámica (discreta) en espacios uno-dimensionales (es decir, un intervalo, la recta, el círculo, etc.). Nuestro curso comienza en el primer capítulo con definiciones básicas de sistemas dinámicos, y con un análisis de la dinámica de homeomorfismos de intervalos cerrados. Luego en el Capítulo 2 estudiamos homeomorfismos en el círculo, en particular la teoría clásica del número de rotación de Poincaré. Ya en el capítulo 3 analizamos la familia cuadrática real, y discutimos su diagrama de bifurcaciones. Es importante señalar que mismo en el contexto aparentemente sencillo de sistemas en dimensión uno, y mismo siendo este un curso introductorio, ya es posible vislumbrar la riqueza y complejidad de comportamientos diversos en estos espacios.

El material que se discute aquí es muy similar al presentado en [2]. Otros libros que encontré útiles a la hora de preparar el curso fueron [7], [6] y las notas [3]. Dada la naturaleza intensa de la escuela, decidí no dar muchos ejercicios y me limité a algunos representativos. El lector interesado puede encontrar otros problemas en la bibliografía antes citada.

Finalmente, es un placer agradecer a los organizadores de la escuela EMALCA por la invitación y el excelente trato, en particular a los Profesores Christian Schaerer, José Acosta, y a todo el personal de la universidad Gerardo Barrios por la atención recibida.

Conceptos básicos en sistemas dinámicos

I.1. Introducción

Esencialmente un sistema dinámico consiste en tres componentes.

- 1) Un conjunto M denominado *espacio de fases* donde acontece la dinámica.
- 2) Una noción de tiempo T .
- 3) Una ley de movimiento $\{f_t\}_{t \in T}$, donde cada $f_t : M \rightarrow M$ es una función.

En este curso nos concentraremos en el caso donde

- M es un espacio métrico compacto, o $M \subset \mathbb{R}$.
- $T = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.
- $f_t = f^t = f \circ \dots \circ f$ compuesta $|t|$ veces, con $f^0 = Id$ (la identidad). Aquí $f : M \rightarrow M$ es continua, diferenciable, etc.

Cambiando la notación $t = n$, para $x \in M$ el punto $f^n(x)$ representa el estado de x en tiempo n .

Ejemplo I.1.1. Consideremos un proceso químico aislado a volumen constante. Nos interesa determinar la temperatura conforme avanza el tiempo. Así, elegimos $M = [0, 100] \subset \mathbb{R}$ que representa el rango de temperaturas posibles. Suponemos que el proceso evoluciona mediante una ley f , esto es, dado que el sistema tiene temperatura x el valor $y = f(x)$ representa la temperatura del sistema luego de 1 segundo.

Pregunta. Si comenzamos con temperatura 22, ¿cuál es la temperatura después de 1 minuto?

Respuesta. $f^{60}(22)$.

Algunas consideraciones:

1. Nuestros sistemas son determinísticos. Si conocemos el estado x determinamos unívocamente $y = f(x)$ (el estado después de una unidad de tiempo).

2. En general nos interesa el comportamiento asintótico, es decir, lo que acontece con el estado $f^n(x)$ cuando $n \mapsto \infty$. Calcular este comportamiento para cada punto es en la práctica casi siempre inviable.

Ejemplo I.1.2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dado por $f(x) = 2x \bmod 1 = 2x - [2x]$. ¿Consigues calcular el comportamiento de $f^n(\frac{1}{\pi})$ cuando $n \mapsto \infty$?

Supongamos ahora que consideramos $x = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{10^{23}}$. ¿El comportamiento de $f^n(\frac{1}{\pi})$ y $f^n(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{10^{23}})$ es el mismo para $n \mapsto \infty$?

3. Volviendo a nuestro experimento, supongamos que la ley f que determina el nuevo estado para volumen (constante) V está dada por

$$f_V(x) = 200x + \sin\left(\frac{2\pi x}{V}\right) \bmod 100$$

¿qué acontece con la comportamiento asintótico si variamos V ?

I.2. Vocabulario

De ahora en más identificaremos sistema dinámico = $f : M \rightarrow M$.

Definición I.2.1. La órbita positiva de $x \in M$ es

$$O_f^+(x) = \{x, fx, \dots, f^n x, \dots\}.$$

Si f es invertible definimos también $O_f^-(x) := O_{f^{-1}}^+(x) = \{x, f^{-1}x, \dots, f^{-n}x, \dots\}$, y definimos la órbita (total) de x como

$$O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \{f^n x\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Definición I.2.2.

1. x es un punto periódico si $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m x = x$: el menor de tales $m \geq 1$ es el periodo x y lo denotamos $\text{per}(x)$.
2. x es pre-periódico si existe $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m x$ es periódico.

Ejercicio I.2.1. Mostrar que x es pre-periódico si¹ $\#O^+(x) < \infty$.

Denotamos

$$\mathcal{P}er(f) = \{x : x \text{ es periódico}\}$$

$$\mathcal{P}er_m(f) = \{x : x \text{ es periódico con } \text{per}(x) \leq m\}$$

Claramente $\mathcal{P}er(f) = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{P}er_m(f)$.

Ejercicio I.2.2. Supongamos que M espacio métrico ($\mathbb{R}$, por ejemplo) y $f : M \rightarrow M$ continua. Mostrar

¹Si y solamente si.

1. $\mathcal{P}er_m(f)$ es cerrado para todo m .
2. $\{x : \text{per}(x) = m\}$ no es necesariamente cerrado.

Definición I.2.3. x es punto fijo de f si $f(x) = x$ (en otras palabras, $\text{per}(x) = 1$). El conjunto de puntos fijos lo denotamos $\mathcal{F}ix(f)$.

Hasta ahora tenemos una clasificación muy rudimentaria del tipo de órbitas que pueden aparecer: finitas o infinitas. Como señalamos antes, en sistemas dinámicos nos interesa principalmente el comportamiento asintótico de las órbitas. Para entender un poco mejor tal comportamiento introducimos los siguientes conceptos.

Definición I.2.4. El omega límite de x es

$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sub-sucesión tal que } f^{n_k}x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y\}$$

Si f es un homeomorfismo definimos también el α límite de x como $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$, esto es

$$\alpha_f(x) = \{y \in M : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sub-sucesión tal que } f^{-n_k}y \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x\}$$

Claramente $\omega_f(x) = \omega_f(f^m x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (respectivamente $m \in \mathbb{Z}$ si f es homeomorfismo), y similarmente $\alpha_f(x) = \alpha_f(f^m x)$. En otras palabras, ω_f, α_f dependen de la órbita de x más que del propio x .

Proposición I.2.1.

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{O^+(f^n x)}$$

$$\alpha_f(x) = \bigcap_{n \leq 0} \overline{O^-(f^{-n} x)}$$

Demostración. Ejercicio. ■

Corollary I.2.2. Valen las siguientes propiedades para todo $x \in M$.

1) $\omega_f(x)$ (resp. $\alpha_f(x)$) es cerrado.

Demostración. Claro desde la proposición anterior ya que la intersección de cerrados es cerrada. ■

2) $\omega_f(x)$ (resp. $\alpha_f(x)$) es completamente invariante.

Definición I.2.5. Decimos que un conjunto $N \subset M$ es invariante si $f(N) \subset N$, y es completamente invariante si $f(N) = N$.

Demostración. Si $y \in \omega_f(x)$, $y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}x \therefore fy = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}x$, lo que implica $fy \in \omega_f(x)$. Mostramos que $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$, es decir que $\omega_f(x)$ es invariante. Idem, si f homeomorfismo entonces $\omega_f(x)$ es completamente invariante. ■

3) Si M compacto $\omega_f(x) \neq \emptyset$ (resp. $\alpha_f(x) \neq \emptyset$)

Demostración. $\{f^n x\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tiene una sub-sucesión convergente, debido a la compacidad de M . ■

I.3. Método gráfico para iterar en el intervalo

Nos concentraremos ahora en el caso cuando M tiene dimensión 1, y comenzaremos por considerar el caso $M = [a, b]$. Describimos a continuación una herramienta que nos permite determinar gráficamente el comportamiento de las órbitas.

Supongamos que comenzamos con x . Para calcular $f(x)$ simplemente trazamos una recta vertical por x , e $y = f(x)$ es la intersección de dicha recta con el gráfico de f . Para calcular el punto y en el dominio trazamos una línea horizontal por e intersectamos con la recta $y = f(x)$: la recta vertical por dicha intersección corta el dominio en y , y por tanto al gráfico de f en $f(y) = f^2(x)$. Ahora podemos seguir el procedimiento con $f^2(x)$. Ver figura abajo.

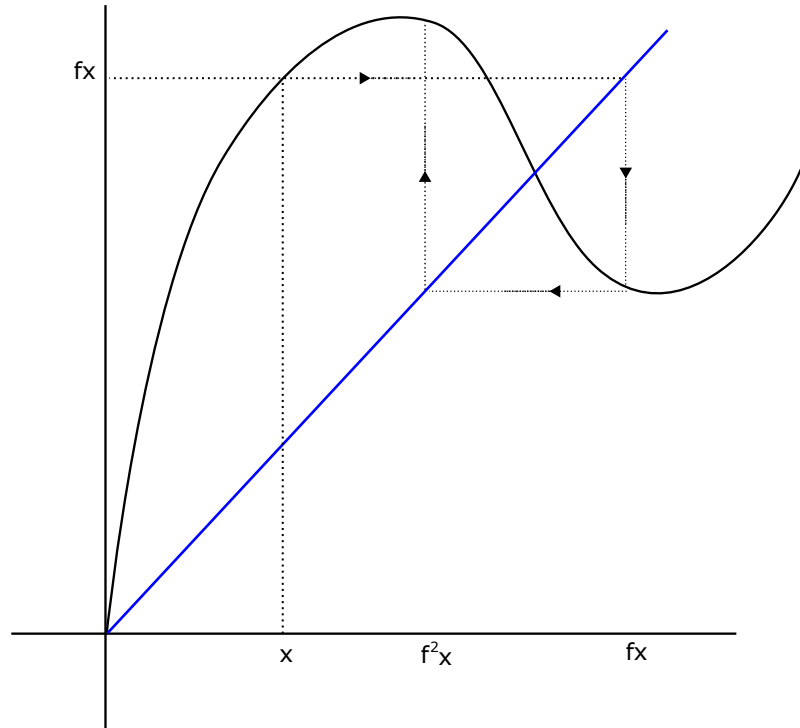


Figura I.1: Iteración en dimensión 1.

Lema I.3.1. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ homeomorfismo creciente.

1. Si $x \in (a, b)$ implica $f(x) > x$, entonces $\forall x \in (a, b)$ vale $\alpha(x) = \{a\}, \omega(x) = \{b\}$.
2. Si $x \in (a, b)$ implica $f(x) < x$, entonces $\forall x \in (a, b)$ vale $\alpha(x) = \{b\}, \omega(x) = \{a\}$.

Demostración. Consideramos sólo la primera parte ya que la segunda es análoga. Observamos primero que $a = f(a), b = f(b)$. Si $x \in (a, b)$ entonces $\{x_n = f^n(x)\}_n$ es una sucesión creciente y por inducción $x_n < b$ para todo n . Sea $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n$. Tenemos $c \leq b$ y $\omega(x) = \{b\}$. Además

$$f(c) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = c$$

por tanto $c = b$. Idem $\alpha(x) = \{a\}$. ■

Para un intervalo $[a, b]$ definimos el espacio

$$\text{Homeo}_+([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow [a, b] : f \text{ homeomorfismo que preserva orden}\}.$$

Teorema I.3.2. Sea $f \in \text{Homeo}_+([a, b])$. Entonces para todo $x \in [a, b]$ vale una de las siguientes posibilidades

1. $x \in \text{Fix}(f)$.
2. $\exists(y, z) \ni x$ tal que $f(y) = y, f(z) = z$ y para todo $x' \in (y, z)$ tenemos $\omega(x') = \{y\}, \alpha(x') = \{z\}$ o $\omega(x') = \{z\}, \alpha(x') = \{y\}$.

Demostración. $\text{Fix}(f)$ es cerrado en $[a, b]$, por tanto $\text{Fix}(f)^c = \sqcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$ donde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $x \notin \text{Fix}(f) \Rightarrow x \in (a_i, b_i)$ para algún i , y por el lema anterior queda. ■

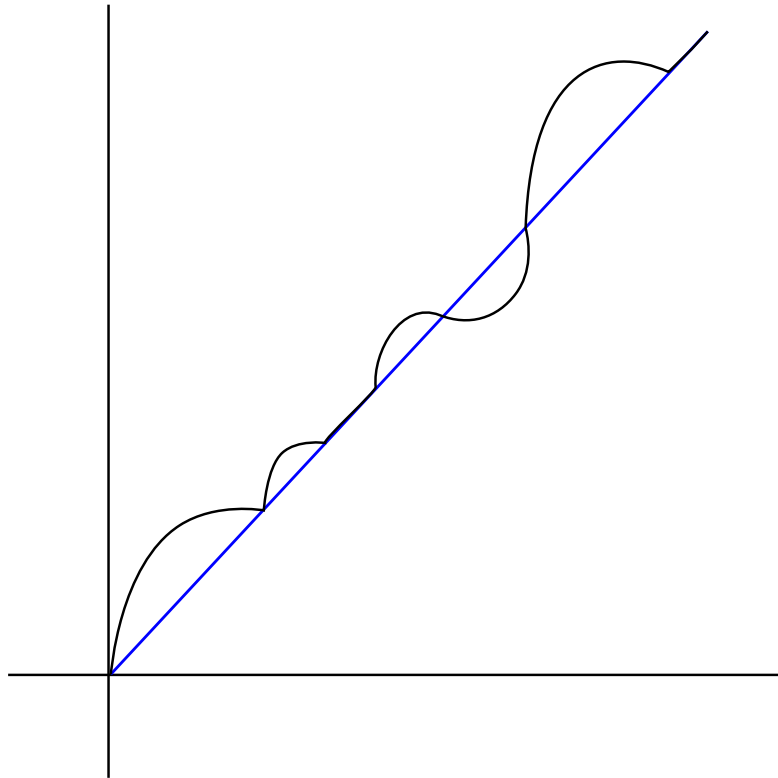


Figura I.2: Ejemplo: Homeomorfismo del intervalo. Observar que puede tener infinitos puntos fijos.

El comportamiento de los homeomorfismos que invierten el orden es de hecho más simple que el caso anterior.

Ejercicio I.3.1. Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ homeomorfismo que invierte el orden. Mostrar que f tiene un único punto fijo y describir la dinámica de f .

Nuestra anterior discusión nos hace deducir que la dinámica de homeomorfismos del intervalo no es muy interesante (por cierto, esto NO implica que el grupo $\text{Homeo}_+([a, b])$ sea “simple”).

Para obtener comportamientos dinámicos más complejos en dimensión uno debemos considerar endomorfismos del intervalo (es decir, mapas continuos no invertibles), o trabajar en el círculo. Haremos esto en los siguientes capítulos. Antes de esto estudiaremos el comportamiento local en un entorno de un punto fijo/periódico.

I.4. Pozos y fuentes

Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Consideremos $x \in \text{Fix}(f)$.

Definición I.4.1. Decimos que x es un pozo si $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x.$$

Decimos que x es una fuente si $\exists \epsilon > 0$ tal que

- $f|_{(x - \epsilon, x + \epsilon)}$ es invertible.
- $\forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(y) = x.$

Notación: $I(x, \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon).$

El siguiente criterio es útil para detectar pozos y fuentes en el caso cuando f es diferenciable.

Proposición I.4.1. Supongamos que $f \in C^1(I, \mathbb{R}), x \in \text{Fix}(f).$

1. Si $|f'(x)| < 1$, entonces x es un pozo.
2. Si $|f'(x)| > 1$, entonces x es una fuente.

Demostración. Mostraremos sólo el segundo caso, cuya prueba contiene la del primero. Como f es C^1 y $f'(x) \neq 0$, por el teorema de la función inversa existen $\epsilon, \epsilon' > 0$ tal que

$$f|_{I(x, \epsilon)} : I(x, \epsilon) \rightarrow I(x, \epsilon')$$

es biyectiva, con inversa g clase C^1 . Tenemos para $y \in I(x, \epsilon'), g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$, por tanto reduciendo ϵ si fuera necesario podemos garantizar que

$$\forall y \in I(x, \epsilon') \quad |g'(y)| < 1.$$

Tomamos λ tal que $\max\{|g'(y)| : y \in I(x, \epsilon')\} < \lambda < 1$: por el teorema de valor medio para $y \in I(x, \epsilon')$ vale

$$\begin{aligned} |g(y) - x| &= |g(y) - g(x)| < \lambda|y - x| \quad (\Rightarrow g(y) \in I(x, \epsilon')) \\ |g^2(y) - x| &< \lambda|g(y) - x| < \lambda^2|y - x| \\ \Rightarrow |g^n(y) - x| &< \lambda^n|y - x| \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Deducimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}y = x$ para todo $y \in I(x, \epsilon')$, por lo que x es fuente. ■

Observación I.4.1. En ambos casos la convergencia a x es exponencial.

Otros nombres comunes para pozos/fuentes son respectivamente *atractores/repulsores*. Más generalmente decimos que x punto periódico de f de período m es un *ciclo atractor/repulsor* si x es un atractor/repulsor para f^m . La palabra 'ciclo' viene de que lo que realmente atrae/repele es la órbita de x (que es un ciclo) en vez del punto x . Notar que en el caso diferenciable el comportamiento local cerca de la órbita de x está determinado por el número

$$|(f^m)'(x)| = \prod_{i=0}^{m-1} |(f)'(f^i x)|$$

Definición I.4.2. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^1 . Decimos que $x \in \mathcal{P}er(f)$ es un punto periódico hiperbólico si $|f^{\text{per}(x)'}(x)| \neq 1$.

Sean $f, g \in C^1(I, \mathbb{R})$ y supongamos que I es un intervalo compacto. Definimos su distancia C^1 entre f y g como

$$d_1(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} + \max\{|f'(x) - g'(x)| : x \in [a, b]\}$$

El siguiente teorema queda a cargo del lector. Recomendamos su resolución, pues el resultado es importante y será utilizado más adelante.

Teorema I.4.2. Sean $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ y p punto fijo hiperbólico de f . Mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que si $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ cumple $d_1(f, g) < \epsilon$, entonces existe p_g punto fijo de g tal que $|g'(p)| \neq 1$, y de hecho p atractor/repulsor para f sii p_g atractor/repulsor para g

El punto p_g obtenido en el teorema arriba se llama la *continuación analítica* de p para el mapa g .

I.5. Conjugación

Sean $f : M \rightarrow M, g : N \rightarrow N$ sistemas dinámicos (por lo menos continuos, M, N espacios métricos).

Pregunta. ¿Cuándo f y g determinan la misma dinámica?

Respuesta (1 de las posibles). Cuando f y g difieren por un cambio de coordenadas.

Esto es, cuando existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

es decir, $hfh^{-1} = g$, o $h^{-1}gh = f$. En este caso decimos que f es topológicamente conjugado a g y escribimos $f \sim g$.

Ejercicio I.5.1. Mostrar que $\sim$ define una relación de equivalencia en $\text{Homeo}(M)$.

Ejemplo I.5.1. Consideramos el mapa logístico $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]. f(x) = 1 - 2x^2$

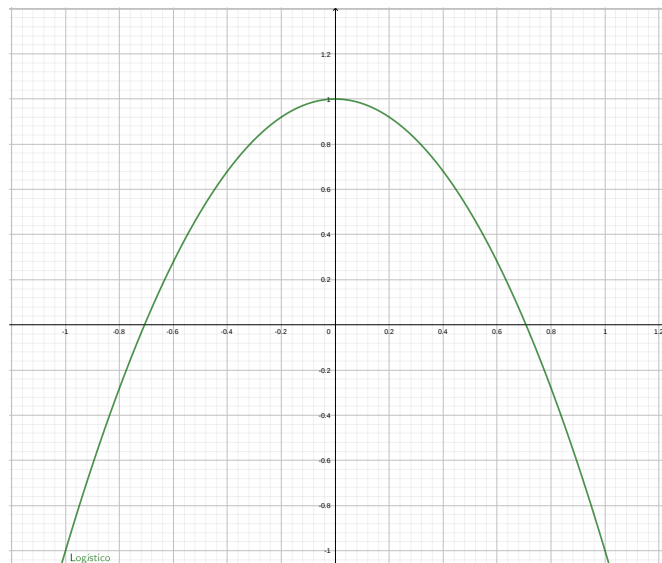


Figura I.3: Mapa logístico

Por otro lado consideramos el mapa tienda $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], g(x) = 1 - 2|x|$. Si $h :$

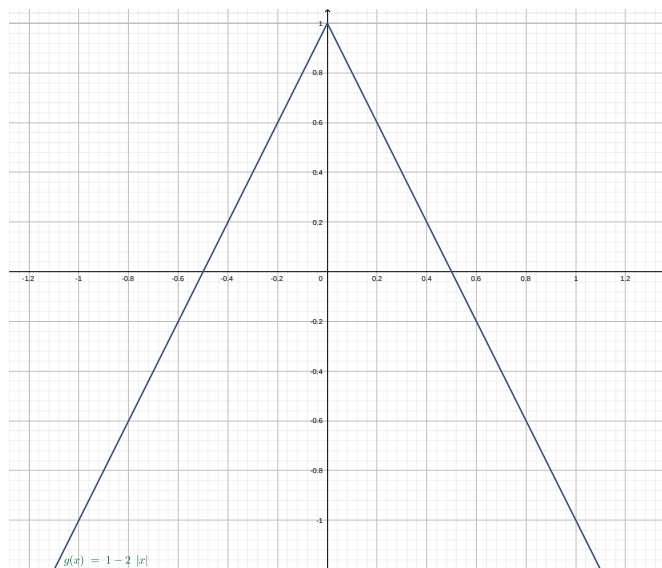


Figura I.4: Mapa tienda

$[-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ es el mapa $h(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$ se verifica (ejercicio) que h difeomorfismo y

$$f \circ h(x) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos(\pi x) = h \circ g(x).$$

La siguiente proposición enumera propiedades básicas de la relación de conjugación, quedando su prueba a cargo del lector.

Proposición I.5.1. Sean $f : M \rightarrow M, g : N \rightarrow N$ conjugados mediante el mapa $h : M \rightarrow N$.

1. $x \in \text{Per}_m(f) \Leftrightarrow h(x) \in \text{Per}_m(g)$.

2. $x \in \omega_f(x) \Leftrightarrow h(y) \in \omega_g(h(x))$. Similarmente, si asumimos además que f, h homeomorfismos tenemos $x \in \alpha_f(x) \Leftrightarrow h(y) \in \alpha_g(h(x))$
3. x es un atractor (repulsor) de f si y solamente si $h(x)$ es un atractor (repulsor) de g .
4. $\overline{O_f^+(x)} = M \Leftrightarrow \overline{O_g^+(h(x))} = N$.

En el resto de esta parte mostraremos para esencialmente podemos clasificar la dinámica de los homeomorfismos del intervalo. El argumento principal está contenido en el siguiente Lema.

Lema I.5.2. Sean $f \in \text{Homeo}_+([a, b])$, $g \in \text{Homeo}_+([c, d])$ que satisfacen $f(x) > x, g(y) > y \quad \forall x \in (a, b), y \in (c, d)$. Elegimos $x_0 \in (a, b), y_0 \in (c, d)$ junto con $h_0 : [x_0, f(x_0)] \rightarrow [y_0, g(y_0)]$ homeomorfismo creciente.

Entonces existe un único homeomorfismo $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ (necesariamente creciente) tal que

- $h|_{[x_0, f(x_0)]} = h_0$.
- $g = hf h^{-1}$.

Demostración. Notar que si h existe, necesariamente $h(f^n x_0) = g^n(y_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por tanto h mapea el intervalo $[f^n x_0, f^{n+1} x_0]$ en el intervalo $[g^n y_0, g^{n+1} y_0]$. De hecho, podemos factorizar $h|_{[f^n x_0, f^{n+1} x_0]}$ de la forma siguiente

$$[f^n x_0, f^{n+1} x_0] \xrightarrow{f^{-n}} [x_0, f x_0] \xrightarrow{h=h_0} [y_0, g y_0] \xrightarrow{g^n} [g^n y_0, g^{n+1} y_0].$$

Por hipótesis las sucesiones $\{f^n x_0\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{g^n y_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ son crecientes, y por el teorema I.3.2 tenemos

$$\omega_f(x_0) = \{b\}, \alpha_f(x_0) = \{a\}, \omega_g(y_0) = \{d\}, \alpha_g(y_0) = \{c\} \quad (\text{I.1})$$

así que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n x_0, f^{n+1} x_0] = (a, b), \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n y_0, g^{n+1} y_0] = (c, d).$$

Definimos entonces $h : (a, b) \rightarrow (c, d)$ mediante la fórmula $h(t) = g^n h_0 f^{-n}(t)$ si $t \in [f^n x_0, f^{n+1} x_0]$. Esto define un mapa continuo estrictamente creciente y usando (I.1) se verifica fácil que extiende continuamente a $[a, b]$ definiendo $h(a) = c, h(b) = d$. Tenemos definido así un homeomorfismo $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ que por definición conjuaga las dinámicas de f y g . ■

Observación I.5.1. Es instructivo notar que el mecanismo central en la prueba anterior es que el intervalo $[x_0, f x_0]$ no tiene recurrencia, y en particular nunca retorna a intersectarse a sí mismo. Una vez que tenemos esto la definición de la conjugación es más o menos obvia. El lector debería recordar el mensaje: en ausencia de recurrencia la dinámica es esencialmente trivial.

Dado $f \in \text{Homeo}_+([a, b])$ el conjunto $\text{Fix}(f)$ es cerrado y por tanto $[a, b] \setminus \text{Fix}(f) = \sqcup_{i \in S} (a_i, b_i)$ donde S es finito o numerable y $a_i, b_i \in \text{Fix}(f)$. Observe también que la función $\tau_f(x) = f(x) - x$ tiene signo constante en cada (a_i, b_i) .

Supongamos ahora que $g \in \text{Homeo}_+([c, d])$ y que existe un homeomorfismo² creciente $h_0 : \text{Fix}(f) \rightarrow \text{Fix}(g)$. Decimos que f, g tienen el mismo tipo si para todo $n \in S$, el signo de τ_f en (a_i, b_i) es el mismo que el signo de τ_g en $(h_0(a_i), h_0(b_i))$. Utilizando el Lema anterior deducimos el siguiente teorema (como ejercicio, escriba los detalles).

²No es necesario pedir la condición de ser homeomorfismo: si h es un mapa creciente entre subconjuntos cerrados de la recta, entonces automáticamente es un homeomorfismo.

Teorema I.5.3. Sean f, g como antes y supongamos que tienen el mismo tipo. Entonces son conjugados.

Los mismos argumentos presentados pueden ser aplicados intercambiando el intervalo por toda la recta real. En particular, el teorema anterior es válido y tenemos como consecuencia lo siguiente.

Corollary I.5.4. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ sin puntos fijos. Entonces es conjugado a la traslación $x \mapsto x + 1$.

CAPÍTULO II

Dinámica de homeomorfismos del círculo

En el capítulo anterior vimos que los homeomorfismos del intervalo tienen una dinámica simple. Siguiendo con nuestro programa de estudiar las posibles dinámicas en dimensión uno, nos disponemos ahora a estudiar el caso cuando nuestro espacio de fases es el círculo. En este caso la dinámica de los homeomorfismos resulta más complicada que antes, aunque aún es posible (bajo hipótesis relativamente débiles) entender las clases de conjugación.

II.1. El círculo

Definimos $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la distancia inducida por el plano complejo, y definimos también $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. El mapa cociente $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ envía cada t en $t + \mathbb{Z}$.

Consideramos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la exponencial compleja $\phi(t) = \exp(2\pi it)$. Es inmediato que ϕ es sobreyectiva, y $\phi(t) = \phi(t')$ si y sólo si $t = t' + n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que ϕ induce una biyección $\tilde{\phi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Mediante la inversa de este mapa transportamos en $\mathbb{T}$ la topología del círculo, y podemos identificar $\mathbb{T} = [0, 1)$ donde los entornos de 0 son de la forma $\{[0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1) : \epsilon > 0\}$.

Convención Identificaremos $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ e escribiremos $\pi = \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ la exponencial compleja.

Un intervalo en $\mathbb{T}$ es un conjunto de la forma

$$I(x, \epsilon) = \{\exp(2\pi it) : t \in (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon), \text{ donde } \exp(2\pi i\theta) = x\}.$$

Tenemos que todo abierto en $\mathbb{T}$ es unión de intervalos. Además el mapa π es un mapa de cubrimiento:

$$\pi^{-1}(I(x, \epsilon)) = \bigsqcup_{r \in \pi^{-1}(x)} (r - \epsilon, r + \epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{T}, 0 < \epsilon < 1/2.$$

Convención De ahora en más todos los mapas considerados son continuos.

Lema II.1.1. Sean $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $\pi F = \pi G$. Entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale $F(t) = G(t) + n$.

Demostración. Sea $k = F - G$. Entonces k es continua y para todo t , $\exp(2\pi ik(t)) = 1$, por tanto $k(t) \in \mathbb{Z}$ para todo t . Como $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua, es necesariamente constante ($= n$). ■

Definición II.1.1. Una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ si $\pi F = f\pi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$

Corollary II.1.2. Si F, G levantamientos de f entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $F = G + n$.

Teorema II.1.3. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Entonces existe un levantamiento F de f .

Demostración. Ejercicio. ■

Consideramos $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ y fijamos un levantamiento F cualquiera. Como $\pi F(0) = \pi F(1)$ tenemos que $F(1) - F(0) = k \in \mathbb{Z}$, y como dos levantamientos difieren en una constante, el entero k no depende del levantamiento.

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi(t) = F(t) - kt$. Tenemos

$$\pi\psi(t+1) = \pi\psi(t) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, \psi(t+1) = \psi(t) + m \quad \forall t$$

$$\text{Como } \psi(1) = F(1) - k = F(0) = \psi(0) \Rightarrow m = 0.$$

Mostramos el siguiente teorema.

Teorema II.1.4. Dado $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ existe un entero $k = k(f)$ tal que para todo levantamiento F de f tenemos

$$F(t) = kt + \psi(t)$$

donde ψ es periódica de periodo 1.

Definición II.1.2. $k(f)$ es el grado de f .

Observación II.1.1. Notemos que si $f \in \text{Homeo}(\mathbb{T})$ entonces $k(f) = \pm 1$. Para ver esto alcanza utilizar cualquier levantado F de f y notar $|F([0, 1])| = |k(f)|$: de hecho este argumento muestra que si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es un mapa de cubrimiento todo punto $x \in \mathbb{T}$ tiene $|k(f)|$ pre-imágenes.

Observar también que f preserva la orientación sii $k(f) > 0$.

II.2. Teoría de Poincaré

II.2.1. Medidas regulares en espacios métricos

Esta parte tiene como objetivo recordar/dar una breve introducción al lector del concepto de medida. La presentación del tema está basada en economía de tiempo más que en generalidad.

Setting: En esta parte X es un espacio métrico compacto (como $\mathbb{T}$) o un espacio métrico localmente compacto y separable (como $\mathbb{R}$).

Denotamos

$$\mathcal{C}_c(X) = \{\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \mid \exists K \subset X \text{ compacto con } \phi(x) = 0 \ \forall x \notin K\}$$

y observamos que $\mathcal{C}_c(X)$ es un espacio vectorial. Consideraremos que $\mathcal{C}_c(X)$ está equipado con la norma

$$\|\phi\|_{c^0} = \max\{|\phi(x)| : x \in X\}$$

Definición II.2.1. Una medida (regular) en X es un mapa lineal $\mu : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x) \geq 0 \ \forall x \Rightarrow \mu(\phi) \geq 0$$

Notación: $\mu(\psi) = \int \psi \, d\mu$.

Es decir, si $\phi, \phi' : X \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos

- $\int a\phi + b\phi' \, d\mu = a \int \phi \, d\mu + b \int \phi' \, d\mu$.
- $\phi \geq 0 \Rightarrow \int \phi \, d\mu \geq 0$.

Ejemplo II.2.1.

1. $X = \mathbb{S}^1$, μ = medida de Lebesgue (Leb) definida como

$$\text{Leb}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \, dx.$$

$$\text{Idem: } X = \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}_c(X) \Rightarrow \text{Leb}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \, dx.$$

2. $x \in X$ definimos δ_x tal que $\delta_x(\phi) = \phi(x)$.

Definición II.2.2. Si X es compacto decimos que μ es una probabilidad si $\mu(\mathbb{1}) = 1$ donde $\mathbb{1}$ es la función constante igual a 1.

Denotamos $\mathcal{P}\mathcal{r}(X)$ el conjunto de probabilidades en X .

Observación II.2.1. Notemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{S}^1$ es una medida de probabilidad. Sin embargo, si pensamos el círculo como $\mathbb{T}$ debemos utilizar

$$\text{Leb}(\phi) = \int_0^1 \phi(x) \, dx$$

para obtener una probabilidad.

Enunciaremos el siguiente teorema que no demostraremos.

Teorema II.2.1. Sea X espacio métrico compacto y $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}\mathcal{r}(X)$ una sucesión de probabilidades. Entonces existe $(n_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{N}$ sub-sucesión y $\mu \in \mathcal{P}\mathcal{r}(X)$ tal que

$$\int \phi \, d\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int \phi \, d\mu \quad \forall \phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}.$$

II.2.2. Medidas invariantes

Sea $f : X \rightarrow X$ continua y μ una medida en X . Decimos que μ es invariante si para toda $\phi \in \mathcal{C}_c(X)$ vale $\mu(\phi \circ f) = \mu(\phi)$. Si X es compacto asumiremos además que μ es una probabilidad y usaremos medida como sinónimo de probabilidad.

Ejemplo II.2.2.

1. Supongamos $f(x) = x$. Entonces δ_x es una medida invariante para f . Más generalmente, si

$x \in \mathcal{P}er(f)$, $m = \text{per}(x)$ entonces $\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{f^i(x)}$ es una medida invariante.

2. Sea $X = \mathbb{T}$, $\alpha \in [0, 1)$ y definimos $r_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ mediante

$$r_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}.$$

r_α es la rotación de ángulo α : tiene (un) levantamiento $R_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $R_\alpha(t) = t + \alpha$ (traslación).

Consideramos Lebesgue y afirmamos que Lebesgue es invariante para r_α . Para mostrar esto tomamos una función continua cualquiera $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y verificamos usando un cambio de variables que

$$\text{Leb}(\phi \circ r_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x + \alpha) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) dx = \text{Leb}(\phi).$$

Notemos que si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ todo punto de $\mathbb{T}$ es periódico (de periodo $= q$), y en particular por la parte anterior existen otras medidas invariantes además de Lebesgue. Por otra parte, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ se puede probar que la única medida invariante de r_α es Lebesgue.

Teorema II.2.2 (Krylov-Bogolyubov). Si X es un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ es continua, entonces existe $\mu \in \mathcal{P}r(X)$ medida invariante para f

Notación: $\mathcal{P}r_f(X) = \{\mu \in \mathcal{P}r(X) : \mu \text{ es } f\text{-invariante}\}$

Demostración. Sea $x \in X$ y definimos $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$. Cada μ_n es una probabilidad así que por el teorema II.2.1 existe una probabilidad μ y $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(\phi) = \mu(\phi)$ para toda función $\phi \in \mathcal{C}(X)$. Es decir,

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{C}(X), \quad \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(f^i(x)) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int \phi d\mu \\ \phi \circ f \in \mathcal{C}(X) &\Rightarrow \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(f^{i+1}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int \phi \circ f d\mu. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(f^{i+1}(x)) = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(f^i(x)) - \phi(x) + \phi(f^{n_k}(x)) \right)$$

y como $\left| \frac{-\phi(x) + \phi(f^{n_k}(x))}{n_k} \right| \leq \frac{2\|\phi\|}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, tenemos $\mu(\phi) = \mu(\phi \circ f)$ para toda ϕ . ■

II.2.3. El número de rotación

Fijemos $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Necesariamente el grado de f es 1, así que todo levantamiento F de f es de la forma

$$F(x) = x + \varphi(x) \quad \varphi \text{ es } 1\text{-periódica}.$$

Lema II.2.3. Sean $M = \max \varphi, m = \min \varphi$. Entonces $M - m < 1$.

Demostración. Consideramos x_m, x_M tales que $\varphi(x_m) = m, \varphi(x_M) = M$ con $0 < x_M - x_m < 1$ (esto siempre es posible porque φ es 1-periódica). Como F levantamiento de f ,

$$\begin{aligned} x_M - x_m \in [0, 1) &\Rightarrow 0 < F(x_M) - F(x_m) < 1 \\ &\sim x_M - x_m + (M - m) < 1 \Rightarrow M - m < 1 \end{aligned}$$

■

Teorema II.2.4. Dado F levantamiento de f existe $\rho(F) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \rho(F).$$

De hecho, la convergencia es uniforme en x (i.e. $\frac{F^n - I}{n} \Rightarrow \rho(F)$).

Definición II.2.3. $\rho(F)$ es el número de rotación de F .

Notar que $F^n(x) - x$ es el desplazamiento de x bajo n iterados, y

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(x)). \quad (\text{II.1})$$

Ejemplo II.2.3. Si r_α es la rotación de ángulo α y R_α la traslación por α en $\mathbb{R}$, verificamos directamente que $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

Lema II.2.5. Sea μ una medida sobre $\mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica tal que existe $c > 0$ con $|\phi(x)| > c \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $\mu(\phi) \neq 0$.

Demostración. Ejercicio. ■

demostración del teorema II.2.4. Por el teorema de Krillov-Bogolyubov sabemos que existe una medida μ invariante para f . Vamos a extender μ a una medida en $\mathbb{R}$ invariante para F “copiando” μ en cada intervalo $[n, n+1)$. Más formalmente, usando la descomposición $\mathbb{R} = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ extendemos¹ μ a $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[n, n+1)} \psi(x) d\mu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[0, 1)} \psi(x+n) d\mu$$

¹Para evitar cargar la notación, seguiremos llamando μ a la extensión

donde identificamos $[0, 1) \approx \mathbb{T}$. Es un ejercicio ver que la extensión es F -invariante.

Ahora aplicamos la extensión en (II.1) para obtener (usando $\mu(\varphi \circ F^i) = \mu(\varphi) \forall i$)

$$\mu\left(\frac{F^n - I}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(\varphi \circ F^i) = \mu(\varphi).$$

Deducimos que

$$\mu(F^n - I - n\mu(\varphi)) = 0.$$

Por otro lado, la función F^n es el levantamiento del homeomorfismo f^n , por lo que $F^n - I$ es una función 1-periódica, lo que implica que $F^n - I - n\mu(\varphi)$ es 1-periódica también. Por continuidad de esta función, y como la medida μ se anula sobre esta, la función no puede tener signo constante (lema anterior). Es decir

$$\exists x_n \text{ tal que } F^n(x_n) - x_n - n\mu(\varphi) = 0$$

Por otra parte aplicando el lema anterior a esta función deducimos

$$\max\{F^n - I - n\mu(\varphi)\} - \min\{F^n - I - n\mu(\varphi)\} < 1$$

y como se anula, necesariamente

$$\|F^n - I - n\mu(\varphi)\|_0 < 1 \Rightarrow \left\| \frac{F^n - I}{n} - \mu(\varphi) \right\|_0 < \frac{1}{n}.$$

La última desigualdad implica la convergencia uniforme de $\frac{F^n - I}{n}$ a $\mu(\varphi)$. ■

Observación II.2.2.

1. Notar que $\rho(F) = \mu(\varphi)$ donde μ es cualquier medida invariante para f . Esta independencia respecto a la medida nos hace sospechar que existe una rigidez respecto a las posibles medidas invariantes. Discutiremos esto más adelante.
2. De la prueba anterior deducimos también que dado n existe x_n tal que

$$\boxed{F^n(x_n) - x_n - n\rho(F) = 0} \tag{II.2}$$

Supongamos ahora que G es otro levantamiento de f . Entonces $G = F + m$ donde $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto

$$\frac{G^n - I}{n} = \frac{F^n - I}{n} + m \Rightarrow \rho(G) = \rho(F) + m.$$

Definición II.2.4. El número de rotación de $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T})$ es $\rho(f) := \rho(F) \pmod{1}$ donde F es cualquier levantamiento de f .

II.2.4. Número de rotación racional

Comenzaremos considerando el caso donde $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, que de hecho es el caso típico.

Proposición II.2.6. $\rho(f) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}er(f) \neq \emptyset$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea F levantamiento tal que $\rho(F) = \rho(f) = \frac{p}{q} \in [0, 1)$ con $^2(p, q) = 1$. Usando (II.2) tenemos un punto x tal que $F^q(x) - x - q\frac{p}{q} = 0 \Rightarrow F^q(x) = x + p$. Definiendo $t = x \pmod{1}$ se deduce $f^q(t) = t$.

$(\Leftarrow)$ Consideremos t tal que $f^q(t) = t$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $t = x \pmod{1}$ y sea F cualquier levantamiento de f . Entonces $F^q(x) = x + p$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, y por tanto

$$\frac{F^n q(x) - x}{nq} = \frac{p}{q} \quad \forall n.$$

Como el límite existe, $\rho(F) = \frac{p}{q}$ y de aquí queda. ■

Observación II.2.3. Supongamos que $\rho(f) = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$. Entonces todo $t \in \mathcal{P}er(f)$ tiene periodo mínimo igual a q .

Para mostrar esto consideramos un levantamiento F de f con $\rho(F) = \frac{p}{q}$ y sea x tal que $t = x \pmod{1}$. Si $k = \text{per}(t)$, tenemos

$$F^k(x) = x + m$$

para cierto $m \in \mathbb{N}$. Con el mismo argumento que el teorema anterior deducimos que $\rho(F) = \frac{m}{k}$, y por tanto existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = ap$, $k = aq$.

Afirmamos que $F^q(x) = x + p$ (y por tanto $a = 1$): si no, por ejemplo si $F^q(x) < x + p$ tenemos $F^{2q}(x) = F^q(F^q(x)) < F^q(x + p) = F^q(x) + p < x + 2p$, y por una inducción simple $F^{aq}(x) < x + ap$ lo que es absurdo. Idem si $F^q(x) > x + p$.

Definición II.2.5. Un difeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ clase $\mathcal{C}^1$ es Morse-Smale ($f \in \text{MS}^1$) si $\mathcal{P}er(f) = \{x_1, \dots, x_k\}$ y para todo i tenemos $|f^{\text{per}(x_i)'}(x_i)| \neq 1$.

Teorema II.2.7. $\text{MS}^1 \subset \mathcal{D}iff^1(\mathbb{S}^1)$ es abierto y denso (con la métrica d_1).

Es decir, dado $f \in \mathcal{D}iff^1(\mathbb{S}^1)$ y $\epsilon > 0$ podemos encontrar una perturbación g de f y $\delta > 0$ tal que

- $d_1(f, g) < \epsilon$.
- si $d_1(h, g) < \delta$ entonces h es Morse-Smale (en particular $g \in \text{MS}^1$);

Por tanto, existe un abierto y denso en $\mathcal{D}iff^1(\mathbb{S}^1)$ donde ρ es racional.

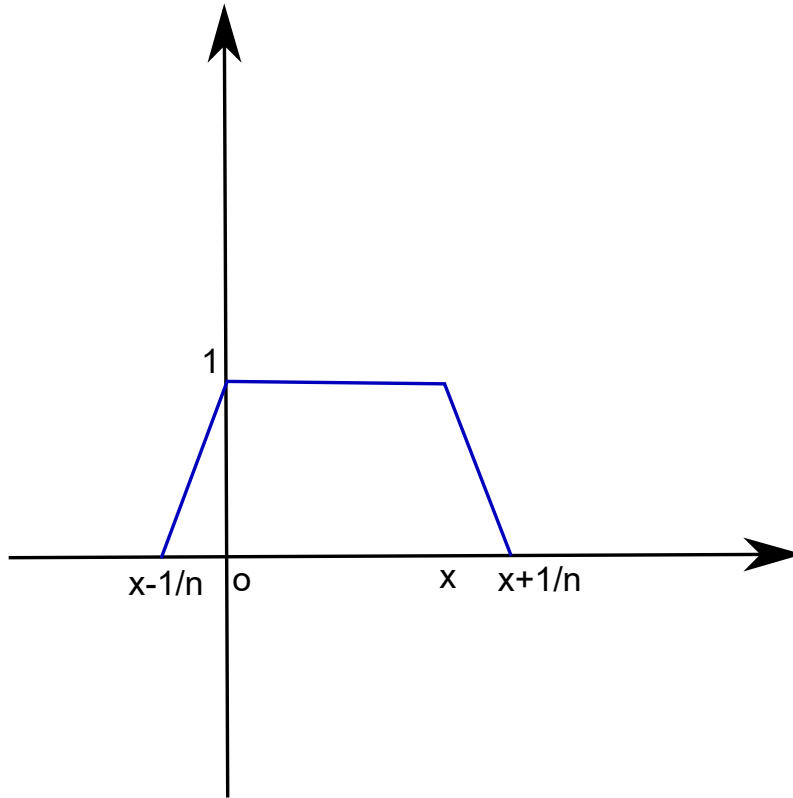
² (p, q) es el mayor divisor común de p, q

II.2.5. Número de rotación irracional

Pasamos a estudiar ahora el caso más interesante, esto es, cuando $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Consideramos $F = I + \varphi$ un levantamiento de f con $\rho(F) = \alpha$, y consideramos μ medida invariante para f (cuya extensión a $\mathbb{R}$ verifica $\rho(F) = \mu(\varphi)$). Definimos

$$H(x) = \int_{[0,x)} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\mu$$

donde ϕ_n es la función cuyo gráfico se ve abajo.



Observación II.2.4. La notación $\int_{[0,x)} d\mu$ sugiere que lo que estamos calculando es el “área” respecto a la medida μ bajo el gráfico de la función

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, x) \\ 0 & t \notin [0, x). \end{cases}$$

En otras palabras, queremos extender μ y calcularla en la función discontinua $\mathbb{1}_{[0,1)}$. Lo que hacemos es aproximar monótonamente $\mathbb{1}_{[0,1)}$ por las funciones continuas ϕ_n . Note que como $\phi_{n+1} \leq \phi_n$ para todo n , $\int \phi_{n+1} d\mu \leq \int \phi_n d\mu$ y la sucesión de números reales $\{\int \phi_n d\mu\}$ es decreciente, por lo que existe límite.

Consideraciones similares se aplican para calcular $\int_A d\mu$ donde $A \subset \mathbb{R}$ es razonablemente bien comportado (cerrado, por ejemplo): si $\mathbb{1}_A$ es el límite (puntual) monótono de funciones continuas $(\phi_n)_n$ definimos $\int_A d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\phi_n)$. Es fácil de ver que este límite no depende de la sucesión monótona escogida, por lo que la definición tiene sentido.

Nos va a interesar en particular el caso cuando $A = \{x\}$; aquí podemos aproximar $\mathbb{1}_{\{x\}}$ por funciones cuyo gráfico es el triángulo isósceles de base $[x - 1/n, x + 1/n]$ y altura 1. Decimos que

una medida μ tiene átomos si existe x tal que $\mu(\{x\}) > 0$. Note que en $\mathbb{T}, \mathbb{R}$, la medida Leb no tiene átomos, mientras que δ_x sí.

Notemos las siguientes propiedades del mapa H :

1. $H(1) = \mu(\mathbb{T}) = 1$.
2. H no decreciente.
3. $H(x+n) = H(x) + n$: esto es consecuencia directa de la definición de μ .
4. En primer lugar la medida μ no tiene átomos: de otra forma, como μ es f -invariante tendríamos

$$\mu(\{x\}) = \mu(\{fx\}) = \mu(\{f^2x\}) = \dots$$

lo que implica que los conjuntos no pueden ser siempre dos a dos disjuntos (la función $\mathbb{1}_A$ donde $A = \cup_{n \geq 0} \{f^n x\}$ tendría integral infinito, lo que es una contradicción ya que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_{\mathbb{T}}$ y $\mu(\mathbb{T}) = 1$), y por tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Esto sabemos que implica $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, en contradicción con lo que asumimos al comienzo.

Debido a esto $H(0) = 0$, y no tiene discontinuidades de salto. Como H monótona deducimos que es continua.

5. H es sobreyectiva: $H([0, 1]) = [0, 1]$ y $H(x+n) = H(x) + n \forall n \in \mathbb{Z}$.
6. Si $a < b$ tenemos $H(b) - H(a) = \mu([a, b]) = \mu((a, b)) = \mu([a, b)) = \mu((a, b])$. Esto es consecuencia de la propiedad anterior y el siguiente ejercicio.

Ejercicio II.2.1. Sean $a < c < b$. Muestre que $\mu([a, b)) = \mu([a, c)) + \mu([c, b))$ (si simplifica su prueba, use que μ no tiene átomos; aunque esto no es necesario es el caso que nos interesa).

Usamos ahora que μ es F -invariante:

$$\begin{aligned} \mu([0, x]) &= \mu(F[0, x]) = \mu([F(0), F(x)]) \Rightarrow H(x) = H(F(x)) - H(F(0)) \\ C &:= H(F(0)) \Rightarrow H(F(x)) = H(x) + C = R_C \circ H(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{R_C} & \mathbb{R} \end{array}$$

Como H es sobreyectiva y hace el diagrama anterior conmutar, decimos que semi-conjuga F y R_C (la diferencia entre una semiconjugación y una conjugación es que la primera puede no ser inyectiva).

Por la propiedad 3 tenemos que $H = Id + k$ donde k es 1=periódica, y por tanto induce un mapa continuo $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ y sobreyectivo tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{r_C} & \mathbb{T} \end{array}$$

Es decir, f es semi-conjugada a la rotación r_C .

Lema II.2.8. Sean $F = Id + \varphi, G = Id + \varphi'$ homeomorfismos crecientes de $\mathbb{R}$ con φ, φ' 1-periódicas. Supongamos que $H = Id + k$ es una función sobreyectiva, continua con k acotada y tal que $HF = GH$.

Entonces $\rho(F) = \rho(G)$.

Demostración. Ejercicio. Use que $H = h + k$ en $HF = GH$ y recuerde que para calcular el nro. de rotación usted puede utilizar cualquier punto que le sea conveniente. ■

Aplicando el lema a $HF = R_C H$ deducimos $C = \rho(R_C) = \rho(F) = \rho(f) = \alpha$. En total, mostramos lo siguiente.

Teorema II.2.9 (Poincaré). Si $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}), \rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Z}$ existe $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ continua, que preserva orientación y sobreyectiva tal que $h \circ f = r_\alpha \circ h$.

Observación II.2.5. Como h preserva la orientación, el orden de los puntos en una órbita $O_f(x)$ es el mismo que el orden de la órbita $O_{r_\alpha}(h(x))$.

Notemos que h es una conjugación si y sólo si h es estrictamente creciente

$$\Leftrightarrow \forall (a, b) \subset \mathbb{T}, \mu(a, b) > 0 \sim \forall \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \phi \geq 0, \phi \not\equiv 0 \Rightarrow \mu(\phi) > 0.$$

Definición II.2.6. Un mapa $f : X \rightarrow X$ de un espacio métrico es transitivo si dados $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

En los ejercicios se muestra que bajo condiciones no muy exigentes (por ejemplo si X es espacio métrico compacto), f es transitivo sii existe una órbita densa para f .

Corollary II.2.10. Si f es transitivo, $\rho(f) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f$ es conjugado a la rotación r_α .

Demostración. Considere un intervalo (a, b) de tamaño maximal y tal que $\mu((a, b)) = 0$. Afirmando que la familia $\{f^n(a, b)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es dos a dos disjunta. De lo contrario, existiría un n tal que $f^n(a, b) \cap (a, b) \neq \emptyset$ y como el conjunto anterior es un intervalo de medida cero, necesariamente $f^n(a) = a, f^n(b) = b$. Esto implica que $f^n|_{[a, b]} \rightarrow [a, b]$ es un homeomorfismo, y por tanto tiene un punto fijo, lo que implicaría un punto periódico para f , en contradicción con que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$.

Pero si f es transitivo claramente la familia anterior no puede ser disjunta, lo que implica que no existe tal intervalo. ■

Analizando la prueba anterior vemos que la obstrucción para f (con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$) ser conjugado a una rotación es precisamente la existencia de un *intervalo errante*. Esto es, un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{T}$ tal que $f^n(a, b) \cap f^m(a, b) \neq \emptyset \Rightarrow n = m$.

Corollary II.2.11. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T})$ con número de rotación irracional. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es conjugado a la rotación $r_{\rho(f)}$.
2. f es transitivo.

3. f es minimal (esto es, todas sus órbitas son densas).
4. f no tiene intervalos errantes.

Terminamos esta parte enunciando el siguiente teorema.

Teorema II.2.12 (Denjoy). Sea $f \in \mathcal{Diff}^2(\mathbb{S}^1) \cap \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con número de rotación irracional. Entonces f no tiene intervalos errantes y es por tanto conjugado a una rotación.

II.3. Mapas expansores del círculo

Comenzaremos ahora a estudiar el caso cuando f no es un homeomorfismo, más un endomorfismo, lo que quiere decir (para nosotros) que f es continua y sobreyectora. Le avisamos al lector que algunos autores requieren la condición más fuerte de ser mapa de cubrimiento: si bien los mapas considerados en esta sección son mapas de cubrimiento, no es necesario para la definición general.

Como punto de partida, consideraremos ahora mapas con grado distinto de 1 en el círculo. Ya en el próximo capítulo consideraremos el caso (más complicado) de mapas del intervalo (sin siquiera ser sobreyectores) .

Ejemplo II.3.1. Para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ el mapa $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definido como $f(x) = kx \pmod{1}$ es un endomorfismo del círculo.

Estudiaremos las funciones como en el ejemplo anterior con $|k| > 1$. Para fijar ideas consideraremos $k = 2$, siendo que el caso general es completamente análogo. Veamos el gráfico de $f(x) = 2x \pmod{1}$. El lector no debe confundirse por el gráfico: esta es una función continua en $\mathbb{T}$ (comparar con el gráfico de lado).

Por inducción se verifica fácilmente que $f^n(x) = 2^n x \pmod{1}$ tiene 2^n ramas inversas $g_{i,n} : [0, 1) = \mathbb{T} \rightarrow [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})$ $i = 0, \dots, 2^n - 1$,

$$g_{i,n}(x) = \frac{x + i}{2^n}.$$

Es relevante señalar que f es un mapa expansor, esto es, el módulo de la derivada en cada punto es mayor que uno. De hecho, $(f^n)'(x) = 2^n \forall n \geq 0$.

II.3.1. Propiedades básicas: puntos periódicos y transitividad

Recordar que estamos identificando $[0, 1) = \mathbb{T}$. Afirmamos que si $x \in [0, 1)$,

$$x \in \text{Per}_{2^n}(f) \Leftrightarrow x = \frac{k}{2^n - 1} \text{ con } k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

En efecto,

$$2^n x = x \pmod{1} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2^n x = x + k \sim x = \frac{k}{2^n - 1},$$

y las soluciones diferentes a la ecuación anterior se dan con $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Notar también que cualquier número racional en $[0, 1)$ con denominador coprimo con 2 es periódico, puesto que f mantiene este tipo de denominadores.

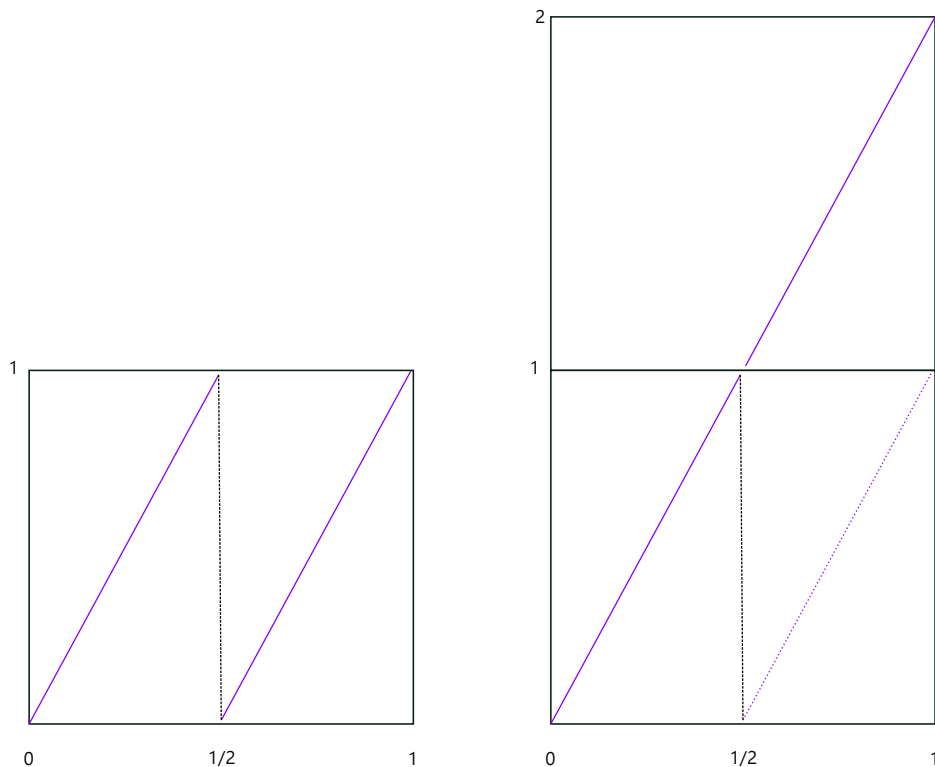


Figura II.1: Gráfico de $x \mapsto 2x \bmod 1$ y de $x \mapsto 2x$.

Corollary II.3.1.

1. $\#Per_{2^n}(f) = 2^n$.
2. $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}$.

Otra propiedad interesante que f posee es la de ser transitivo.

Lema II.3.2. f es transitivo.

Demostración. Sea U abierto no vacío: existe $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ tal que $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \subset U$. Por tanto $f^n(U) \supset [0, 1)$, lo que implica que si V es otro abierto no vacío entonces $f^n(U) \cap V = V \neq \emptyset$. ■

Observación II.3.1. Como se verá en los ejercicios, la transitividad implica la existencia de (un conjunto denso de) órbitas densas. El lector podría entonces conjeturar que la dinámica de los puntos por f es de dos tipos: o finita (puntos pre-periódicos) o densa. Esto NO es cierto. Ver los ejercicios.

Una última propiedad que mencionaremos es que f tiene sensibilidad respecto a las condiciones iniciales.

Definición II.3.1. Sea X espacio métrico y $g : X \rightarrow X$ continua. Decimos que g tiene sensibilidad respecto a las condiciones iniciales si dado $\epsilon > 0$ vale que para todo $x \in X, r > 0$ existe y con $d(x, y) < r$ tal que x e y se separan al menos ϵ en el futuro (esto es $\exists n > 0$ tal que $d(g^n x, g^n y) \geq \epsilon$).

Lema II.3.3. f tiene sensibilidad respecto a las condiciones iniciales.

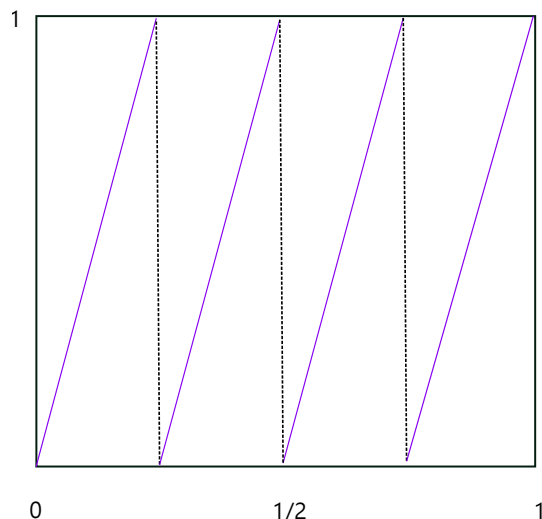


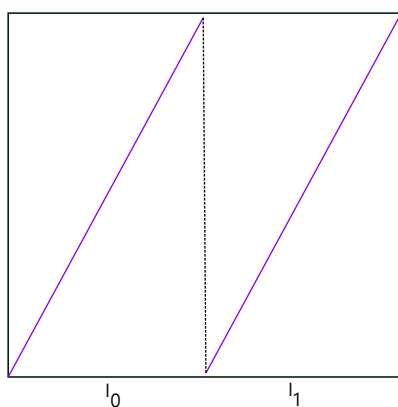
Figura II.2: Gráfico de $f^2 : x \mapsto 4x \pmod{1}$.

Demostración. Ejercicio. ■

La coexistencia de las tres propiedades anteriores (puntos periódicos densos, transitividad y sensibilidad respecto a las condiciones iniciales) es un indicador de que la dinámica de f es complicada o *caótica*. No existe un consenso en la literatura de qué realmente significa un mapa ser caótico: la definición más aceptada sería la de Devaney (que f verifica), pero mismo esta tiene sus limitaciones. Por esto el autor prefiere no dar una definición formal del término “caótico”, y limitarse a mencionar simplemente la complejidad de la dinámica en cuestión.

II.3.2. Semi-conjugación con el shift.

Observando el gráfico de f vemos que existe una manera natural de codificar sus órbitas. Consideremos los intervalos $I_0 = [0, 1/2]$, $I_1 = [1/2, 1) = \overrightarrow{[1/2, 0]}$.



Dado $x \in \mathbb{T}$ construimos su *itinerario*, esto es, una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ de ceros y unos indexando el intervalo donde la órbita cae, esto es

$$x_0 = 0, 1 \Leftrightarrow x \in I_0 \mid I_1, \dots x_n = 0, 1 \Leftrightarrow f^n(x) \in I_0 \mid I_1.$$

El lector observará que existe una indeterminación si $f^n(x) = \frac{1}{2}$; en este caso elegimos cualquiera de los dos intervalos. Notar que como $f(1/2) = 0$, el próximo índice está completamente determinado. Recíprocamente, si $f^n(x) \neq \frac{1}{2} \forall n$, el itinerario de x es único. Concluimos que:

Lema II.3.4. Para cada $x \in \mathbb{T}$ existen a lo más dos itinerarios. Si $x \in G = \{y : f^n(y) \neq \frac{1}{2} \forall n\} = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathbb{T} \setminus \{1/2\})$ entonces x tiene un único itinerario.

El conjunto G del lema anterior es *genérico* en $\mathbb{T}$: es intersección numerable de abiertos y densos (así que por el teorema de Baire es denso).

Para entender un poco mejor el funcionamiento de este proceso de codificación que estamos haciendo conviene recordar que f^n tiene 2^n ramas inversas: dependiendo del dominio de la rama es el codificado correspondiente (ver figura abajo). El lector debe convencerse de que el codificado que realizamos funciona de la siguiente forma:

- dado x partimos en 2 el intervalo $[0, 1)$: si x está en el intervalo izquierdo hacemos $x_0 = 0$, sino $x_0 = 1$. Consideramos el intervalo I_{x_0} y partimos en 2: si x está en el intervalo izquierdo hacemos $x_1 = 0$, sino $x_1 = 1$. Y así por delante.

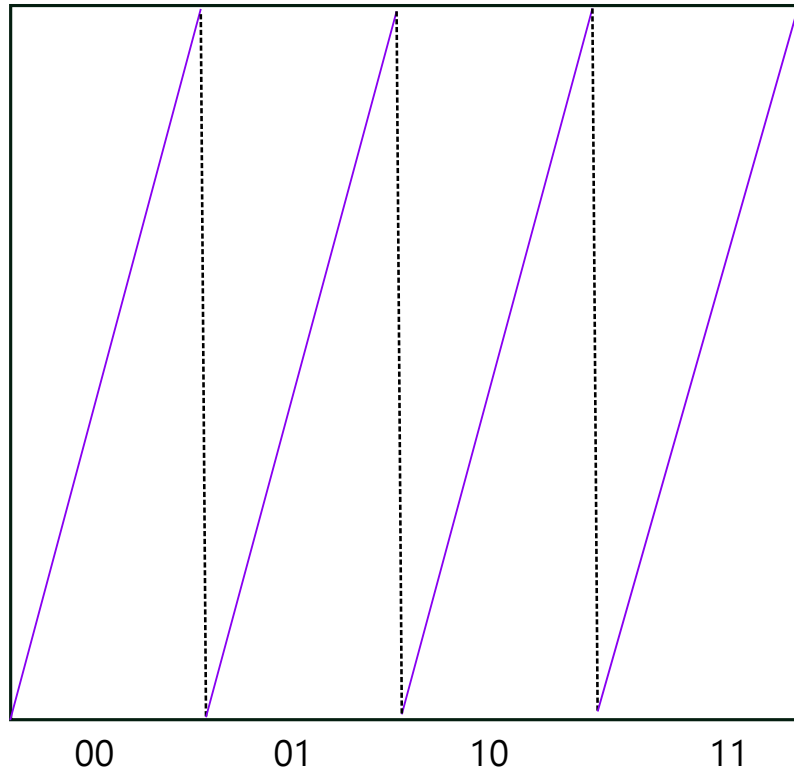


Figura II.3: Gráfico de f^2 .

Siguiendo con nuestro razonamiento, notamos que si $\{x_n\}$ es el itinerario de x entonces por definición

$$x \in I_{x_0} \cap f^{-1}I_{x_1} \cap \cdots \cap f^{-n}I_{x_n} \quad \forall n \geq 0.$$

Además, los conjuntos $\bigcap_{k=0}^n f^{-k}I_{x_k}$ son intervalos compactos encajados, así que

$$\{x\} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcap_{k=0}^n f^{-k}I_{x_k} = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}I_{x_n}. \quad (\text{II.3})$$

Si Σ denota el espacio de códigos, la igualdad anterior nos permite definir un mapa $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}$ que asigna a cada código su punto de itinerario correspondiente.

II.3.3. El espacio de códigos

Definamos $\Sigma = \{\underline{x} = (x_n)_{n \geq 0} : x_n = 0, 1\}$ y consideremos la función $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$,

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2^{N(\underline{x}, \underline{y})+1}}$$

donde $N(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ es tal que $x_n = y_n \forall n = 0, \dots, N(\underline{x}, \underline{y})$ y $x_{N(\underline{x}, \underline{y})} \neq y_{N(\underline{x}, \underline{y})}$. En otras palabras, $N(\underline{x}, \underline{y})$ denota el tamaño de la mayor “ventana” donde vemos las mismas coordenadas para $\underline{x}, \underline{y}$.

$$\begin{array}{c} \boxed{x_0 \cdots x_N} x_{N+1} \\ \boxed{x_0 \cdots x_N} y_{N+1} \end{array}$$

Se verifica directamente (ejercicio) que

1. $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$.
2. $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$.
3. $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$.

Por tanto, d es una métrica sobre Σ . Recomendando el siguiente ejercicio al lector que esté encontrando este tipo de espacio por primera vez. El argumento más directo posiblemente sea usar el principio del palomar de Dirichlet.

Lema II.3.5. *Supongamos que $(\underline{x}^k)_{k \geq 0}$ es una sucesión en Σ . Entonces existe una sub-sucesión $(k_j)_{j \geq 0}$ de naturales y $\underline{x} \in \Sigma$ tal que $\underline{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} \underline{x}^{k_j}$. Es decir, (Σ, d) es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Ejercicio. ■

El espacio Σ viene equipado naturalmente con una dinámica, el shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definido por $\sigma(\underline{x})_n = x_{n+1}$: este mapa corre a la izquierda la sucesión de ceros y unos, descartando la primera coordenada

$$.x_0 x_1 \cdots x_n \cdots \xrightarrow{\sigma} .x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$$

El lector debe poder verificar el lema siguiente sin mucho problema (para la continuidad usar sucesiones, por ejemplo).

Lema II.3.6.

1. σ es continuo.
2. σ es sobreyectivo.
3. $\#\sigma^{-1}(\underline{x}) = 2$.

Hasta ahora nos referimos al espacio Σ como espacio de códigos, aunque nunca explicitamos por qué toda sucesión en Σ representa un itinerario de un punto x por la dinámica f . Volviendo a la ecuación (II.3), vemos que la intersección en el lado derecho tiene sentido para toda sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0} \in \Sigma$: el hecho de que $\{\cap_{k=0}^n f^{-k} I_{x_k}\}_{n \geq 0}$ sea una sucesión de intervalos encajados sólo

depende de que cada ramo inverso de f contrae las distancias por un factor de un $1/2$. Podemos entonces definir $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}$ con la fórmula

$$\{h(\underline{x})\} = \cap_{n \geq 0} f^{-n} I_{x_n}.$$

Por nuestra discusión anterior h es una función sobreyectora con la propiedad que cada punto del círculo tiene a lo más 2 pre-imágenes.

Lema II.3.7. h es continua.

Demostración. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que $d(\underline{x}, \underline{y}) < r$ implica $|h(\underline{x}) - h(\underline{y})| < \epsilon$. Por la definición de d , si M es un número entero fijo $\exists r > 0$ tal que $d(\underline{x}, \underline{y}) < r$ implica que $\underline{x}, \underline{y}$ coinciden en al menos M coordenadas. En particular

$$h(\underline{x}), h(\underline{y}) \in \cap_{n=0}^M f^{-n} I_{x_n}.$$

Como el conjunto de la derecha tiene diámetro $\leq \frac{1}{2^{M-1}}$, dado ϵ alcanza tomar M tal que $\frac{1}{2^{M-1}} < \epsilon$ y utilizar el r correspondiente. ■

Comparando los códigos correspondientes a $\underline{x}$ y $\sigma \underline{x}$ vemos que se verifica $h(\sigma \underline{x}) = f(h(\underline{x}))$,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$

Mostramos lo siguiente.

Proposición II.3.8. Existe una semi-conjugación h entre el shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ y el mapa expansor lineal $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ dado por $f(x) = 2x \pmod{1}$.

El mismo teorema vale cambiando f por el mapa expansor $x \mapsto kx \pmod{1}$, con $k \neq \pm 1$ (el correspondiente espacio de símbolos tendrá ahora $|k|$ posibilidades por entrada). Muchas de las propiedades de f pueden deducirse fácilmente de las correspondientes propiedades para $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, que en general pueden establecerse más fácilmente. En los ejercicios se dan ejemplos de este tipo de argumentos.

No es terriblemente complicado mostrar que el espacio Σ es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. Resulta interesante observar entonces que una dinámica actuando en un espacio continuo (f) puede describirse en términos de la dinámica en un espacio discreto, de forma muy controlada. Esto es de hecho un fenómeno más general y depende de que f' tiene módulo mayor que uno en todo punto. Culminamos esta parte con una definición y un teorema.

Definición II.3.2. Decimos que $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ clase C^1 es un mapa expansor del círculo si existe $c > 1$ tal que para todo $x \in \mathbb{S}^1$ vale $|f'(x)| > c$.

Teorema II.3.9 (Shub). Si f es un mapa expansor del círculo entonces f es conjugado a un mapa de la forma $x \mapsto kx \pmod{1}$ donde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$.

CAPÍTULO III

La familia cuadrática

En esta parte estudiaremos la dinámica de los polinomios cuadráticos

$$Q_c(x) = x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Observando las figuras abajo es evidente que la dinámica de estas funciones muda conforme el parámetro c va cambiando.

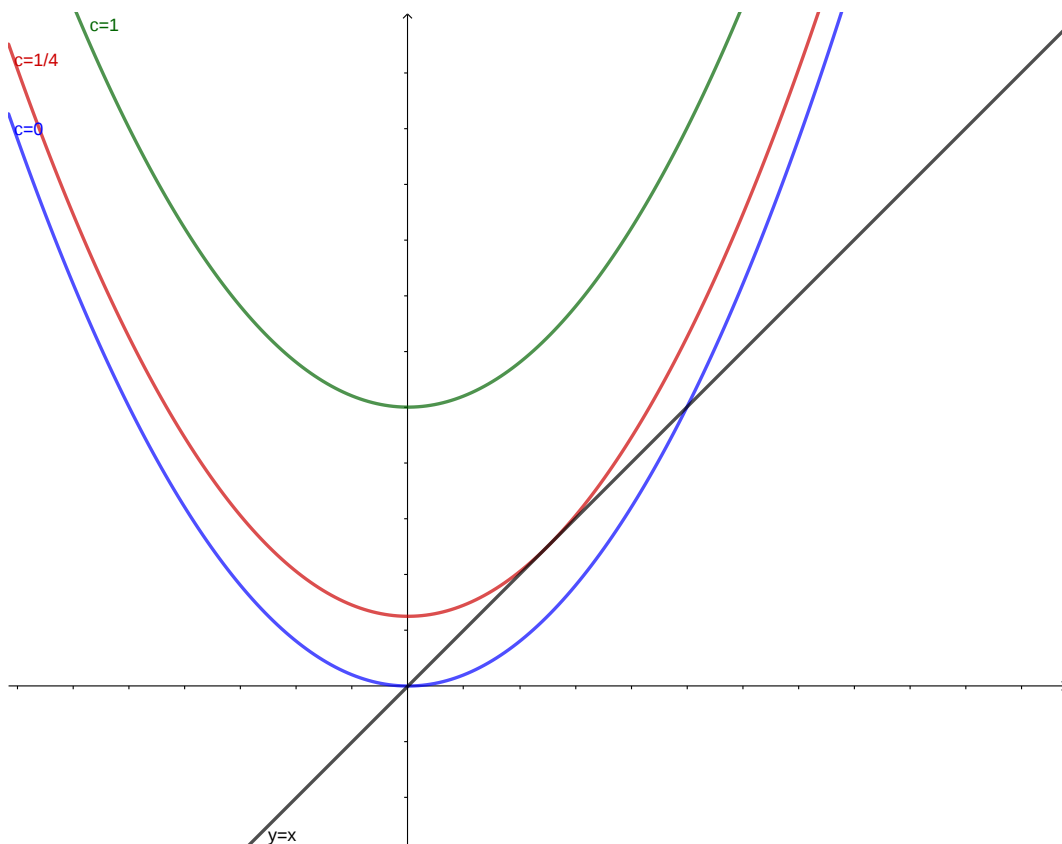


Figura III.1: Diferentes mapas cuadráticos.

Decimos que $\{Q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{c \in \mathbb{R}}$ es una familia a 1-parámetro, y estamos interesados en entender la dependencia de las dinámicas respecto a c . La primera pregunta que puede hacerse el lector es ¿por qué estudiamos estos mapas?. Anteriormente trabajamos con homeomorfismos

de la recta y del intervalo, y clasificamos completamente sus comportamientos. En particular entendemos la dinámica de los mapas lineales $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Es natural entonces subir un nivel de complejidad e intentar entender mapas cuadráticos

Ejercicio III.0.1. *Mostrar que si $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es un polinomio de grado 2, entonces es conjugado a un Q_c para algún c .*

La segunda pregunta que puede aparecer es ¿no son estas dinámicas “simples”? Después de todo $x^2 + c$ parece ser un mapa bastante sencillo. El objetivo de este capítulo es mostrar al lector que esto está muy (muy) lejos de ser verdad.

III.1. Propiedades básicas

Comenzamos encontrando los puntos fijos de Q_c ; la ecuación $Q_c(x) = x$ tiene raíces

$$p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad (\text{III.1})$$

$$p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad (\text{III.2})$$

- $c > 1/4$: tenemos $\text{Fix}(Q_c) = \emptyset$ y para todo $x \in \mathbb{R}, Q_c^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (usar método gráfico de iteración, por ejemplo).
- $c = 1/4$: $\text{Fix}(Q_c) = \{p_+ = 1/2 = p_-\}$. Como $Q'_{1/4}(1/2) = 1$, el punto fijo es neutro. Notemos que

$$Q_{1/4}(x) - Q_{1/4}(1/2) = (x - 1/2) + (x - 1/2)^2$$

por lo que $1/2$ atrae por izquierda y repele por derecha.

- $c < 1/4$: $\text{Fix}(Q_c) = \{p_+, p_-\}$. Calculando la derivada obtenemos

$$\begin{aligned} Q'_c(p_+) &= 1 + \sqrt{1 - 4c} > 1 \Rightarrow p_+ \text{ repulsor} \\ Q'_c(p_-) &= 1 - \sqrt{1 - 4c} \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor} & c \in (-3/4, 1/4) \\ \text{neutro} & c = -3/4 \\ \text{repulsor} & c < -3/4 \end{cases} \end{aligned}$$

Notamos que existe una *bifurcación* en $c = 1/4$: esto es la dinámica de la familia cambia cuando atravesamos el parámetro. En particular, tenemos que

1. $c > 1/4 \rightarrow \#\text{Fix}(Q_c) = 0$.
2. $c = 1/4 \rightarrow \#\text{Fix}(Q_c) = 1$ (y es un punto neutro)
3. $c < 1/4 \rightarrow \#\text{Fix}(Q_c) = 2$ (y para valores c cercanos de $1/4$ un punto fijo es atractor y el otro repulsor.)

Este tipo de bifurcación se llama **silla-nodo** (ver figura III.1). Si bien estamos usando el término “bifurcación” casi de manera coloquial, tiene un significado preciso.

Definición III.1.1. Consideramos una familia a 1-parámetro $\{f_c : M \rightarrow M\}_{c \in I}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Decimos que la familia tiene (o sufre) una bifurcación en $c_0 \in I$ si existe $\delta > 0$ tal que $I(c_0, \delta) \subset I$ y además $(c_0 - \delta, c_0), (c_0, c_0 + \delta)$ determinan clases de conjugación diferentes en la familia.

Ejercicio III.1.1. Mostrar que la familia cuadrática $\{Q_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ tiene una bifurcación en el parámetro $c = 1/4$ (puede ser provechoso continuar leyendo antes de intentar resolver el problema)

De ahora en más asumiremos que $c < 1/4$ puesto que la dinámica de Q_c es trivial para $c \geq 1/4$. Definimos el intervalo

$$I_c := [-p_+, p_+]$$

Observación III.1.1. $x \notin I_c \Rightarrow Q_c^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

En efecto, si $x > p_+$ tenemos $Q_c(x) > x$ y la sucesión $Q_c^n(x)$ es monótona creciente y claramente no limitada, por tanto tiende a $+\infty$. Por otro lado, si $x < -p_+$ entonces $Q_c(x) > p_+$ y pasamos al caso anterior.

Concluimos que la dinámica relevante de Q_c ocurre dentro de I_c (el término técnico es que todo punto fuera de I_c es errante). Consideraremos primero el caso $c \in (-3/4, 1/4)$, y por tanto p_- es atractor.

Pregunta. ¿cuáles puntos $x \in I$ cumplen $Q_c^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_-$?

Definición III.1.2. Sea $f : M \rightarrow M$ con $x \in \text{Fix}(f)$ atractor. La cuenca de atracción de x es

$$W^s(x; f) = W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x\}.$$

La cuenca inmediata¹ de atracción de x es $W_{\text{loc}}^s(x)$, la componente conexa de $W^s(x)$ que contiene al punto x .

Ejercicio III.1.2. Mostrar que $W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_{\text{loc}}^s(x)$. Mostrar también que $W^s(x)$ es abierto y además $W_{\text{loc}}^c(x), W^s(x)$ son invariantes.

Cuando $M = \mathbb{R}$ es simple clasificar las posibles cuencas de atracción inmediata.

Proposición III.1.1. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y $x \in \text{Fix}(f)$ atractor. Entonces $W_{\text{loc}}^s(x) = (a, b)$ del tipo

1. infinito: $(-\infty, +\infty), (-\infty, b), (a, +\infty)$ donde $a, b \in \text{Fix}(f)$.
2. finito: (a, b) con $a, b \in \text{Fix}(f)$.
3. finito: (a, b) con

a) $a \in \text{Fix}(f), f(b) = a$.

¹La notación $W_{\text{loc}}^s(x)$ para cuenca de atracción inmediata puede ser diferente en otras referencias.

b) $b \in \mathcal{F}ix(f)$, $f(a) = b$.

c) $f(a) = b$, $f(b) = a$.

Demostración. Por el ejercicio anterior y la conexidad sabemos que es un intervalo abierto.

- Si es ilimitado, como $f(W_{\text{loc}}^s(x)) \subset W_{\text{loc}}^s(x)$ tenemos $\partial W_{\text{loc}}^s(x) \subset \mathcal{F}ix(f)$. Si por ejemplo a es finito y $f(a) \neq a$, entonces $f(a) \in (a, b)$ por tanto $f^n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y por tanto $a \in (a, b)$ lo que es un absurdo. Similarmente si b es finito entonces $f(b) = b$.
- En caso de que a, b finitos tenemos por continuidad de f que $f(a), f(b) \in \{a, b\}$. De aquí se deducen las otras posibilidades.

■

Para ciclos atractores extendemos la notación de forma natural: si p es un punto periódico atractor de f con período m denotamos

$$W^s(p) = \cup_{i=0}^{m-1} W^s(f^i p; f^m)$$

$$W_{\text{loc}}^s(p) = \cup_{i=0}^{m-1} W_{\text{loc}}^s(f^i p; f^m)$$

Volviendo a Q_c queremos calcular $W_{\text{loc}}^s(p_-)$ (para $c \in (-3/4, 1/4)$). Existen dos posibilidades

1. $W_{\text{loc}}^s(p_-) = (-p_+, p_+)$ (porque p_+ es el único punto fijo diferente de p_-).
2. Existe $a \in I_c$ de período 2 tal que $W_{\text{loc}}^s(p_-) = (a, Q_c(a))$.

Nuestra tarea ahora es encontrar los puntos periódicos de periodo 2. Estos son solución de la ecuación $Q_c(Q_c(x)) = x$, es decir

$$(x^2 + c)^2 + c = x \Rightarrow x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$$

$$(x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1) = 0$$

El polinomio de la izquierda tiene raíces p_-, p_+ , mientras que el polinomio de la derecha tiene raíces

$$r_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4c}}{2} \quad r_- = \frac{-1 - \sqrt{3 - 4c}}{2}$$

Tenemos que $r_-, r_+ \in \mathbb{R}$ si y solamente si $c \leq -3/4$. En particular no hay puntos periódicos de período dos para $c \in (-3/4, 1/4)$, y por tanto

$$\boxed{W_{\text{loc}}^s(p_-) = I_c \quad c \in (-3/4, 1/4)}$$

Para estos parámetros la dinámica de Q_c es trivial, y claramente todos estos mapas son conjugados.

Para $c = -3/4$ tenemos $r_+ = r_- = p_-$, que es un punto neutro.

Ejercicio III.1.3. Mostrar que p_- en este caso es un atractor y deducir que $W_{\text{loc}}^s(p_-) = I_{-3/4}$.

III.2. Ciclos atractores

Nos resta estudiar que acontece con $c < -3/4$. Sabemos que aparece un punto periódico de período 2, y calculando su multiplicador obtenemos

$$Q'_c(r_-)Q_{r_+} = 4(c+1) \Rightarrow \text{el ciclo es } \begin{cases} \text{atractor} & c \in (-5/4, -3/4) \\ \text{neutro} & c = -5/4 \\ \text{repulsor} & c < -5/4 \end{cases}$$

Es simple mostrar que existe otra bifurcación en el parámetro $c = -3/4$, donde aparece el ciclo periódico de periodo 2. Este tipo de bifurcación se denomina *de duplicación de periodo*.

Definición III.2.1. Consideramos una familia a 1-parámetro $\{f_c : M \rightarrow M\}_{c \in I}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Decimos que la familia tiene (o sufre) una bifurcación de duplicación de período en $c_0 \in I$ si existe $\delta > 0$ tal que $I(c_0, \delta) \subset I$ que satisface las siguientes propiedades.

1. Para todo $c \in I(c_0, \delta)$ existe un único $p_c \in \text{Fix}(Q_x)$. O bien todo p_c es atractor para $c \in (c_0 - \delta, c_0)$ y repulsor para $c \in (c_0, c_0 + \delta)$, o viceversa.
2. Para $c \in [c_0, c_0 + \delta)$ tenemos $\text{Per}_2(f_c) = \{p_c\}$, y para $c \in (c_0 - \delta, c_0)$ tenemos $\text{Per}_2(f_c) = \{p_c, r_-(c), r_+(c)\}$ con $\{r_-(c), r_+(c)\}$ ciclo periódico atractor. Alternativamente, vale lo mismo intercambiando $(c_0 - \delta, c_0) \leftrightarrow (c_0, c_0 + \delta)$, $[c_0, c_0 + \delta) \leftrightarrow (c_0 - \delta, c_0)$.
3. $\lim_{c \rightarrow c_0} r_+(c) = p_{c_0}$.

Volviendo a la familia cuadrática, tenemos que no hay dinámica interesante para $c \geq -3/4$. Para entender qué acontece para otros valores introduciremos el siguiente operador.

Definición III.2.2. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^3 . La (derivada) Schwartziana de f en x es

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \quad \text{si } f'(x) \neq 0.$$

A primera vista la formula de Sf es algo misteriosa. Sin embargo, sirve para cuantificar que tan “lejos” está f de ser una transformación de Möbius (es decir, de la forma $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$). Mostraremos que $Sf = 0$ acontece si y solamente si f es Möbius: esto es análogo al hecho de que el operador usual de derivación mide que tan lejos se encuentra f de una función constante. Comenzamos con la siguiente observación, que se verifica por cálculo simple.

Observación III.2.1. Sea $g = \frac{1}{\sqrt{|f'|}}$. Entonces g es solución de la ecuación diferencial

$$\psi'' = -\frac{1}{2} Sf \cdot \psi.$$

Corollary III.2.1. $Sf \equiv 0$ (es decir, existe y es idénticamente nula) $\Leftrightarrow$ existen números reales a, b, c, d tales que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ para todo $x \in I$.

Demostración. Comenzamos probando la implicación directa. Por la observación anterior $\psi'' = 0$, y en consecuencia

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|f'(x)|}} = cx + d.$$

Como Sf existe en I , $f'(x)$ tiene signo constante en I . Si $f'(x) > 0$ en I entonces

$$f'(x) = \frac{1}{(cx + d)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Idem si $f'(x) < 0$. El recíproco se prueba fácilmente por cálculo directo. ■

Lema III.2.2. Vale

$$S(g \circ f) = (Sg \circ f) \cdot (f')^2 + Sf$$

Demostración. Ejercicio. ■

Del lema anterior obtenemos que:

1. f es Möbius $\Rightarrow Sf = (Sg \circ f) \cdot (f')^2$
2. $Sf < 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(f^n) < 0$.

Funciones con derivada Schwartziana negativa satisfacen la siguiente versión del principio del mínimo.

Proposición III.2.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $Sf(x) < 0$ en (a, b) . Entonces

$$\forall x \in (a, b) \Rightarrow |f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

Demostración. Supongamos que existe $y_0 \in (a, b)$ donde $|f'|$ tiene un mínimo. Entonces y_0 es máximo o mínimo local de $g = f'$, y por tanto $g'(y_0) = 0$, lo que implica

$$0 > Sf(y_0) = \frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)} \Rightarrow g''(y_0) \cdot g(y_0) < 0.$$

Así, tenemos dos posibilidades

$$\begin{cases} g''(y_0) > 0 \\ g(y_0) < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} g''(y_0) < 0 \\ g(y_0) > 0 \end{cases}$$

En ambos casos y_0 es un máximo local de $|g| = |f'|$. Como necesariamente $|f'|$ tiene un mínimo, se tiene que dar en a o b .

Otra forma: Supongamos por absurdo que $|f'|$ tiene un mínimo en un punto interior $y_0 \in (a, b)$. Entonces $\psi = \frac{1}{\sqrt{|f'|}}$ tiene un máximo local en y_0 , lo que implica que $\psi'(y_0) = 0$, $\psi''(y_0) \leq 0$.

Por otro lado,

$$\psi'' = -\frac{1}{2} Sf \cdot \psi$$

lo que contradice el hecho de $Sf < 0$. ■

Volviendo al mapa Q_c , es fácil notar que $SQ_c(x) < 0$ para $x \neq 0$, y por tanto $SQ_c^n(x) < 0$ (en puntos donde esté bien definida).

Lema III.2.4. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $Sf < 0$ y $p \in \mathcal{F}ix(f)$ atractor tal que $W_{loc}^s(p)$ es un intervalo limitado. Entonces existe $x_0 \in W_{loc}^s(p)$ tal que $f'(x_0) = 0$ (a posteriori, la Scharztiana no está definida en x).

Demostración. Escribimos $W_{loc}^s(p) = (a, b)$; por III.1.1 $\{f(a), f(b)\} \subset \{a, b\}$. Tenemos las siguientes posibilidades.

1. $f(a) = f(b)$; la existencia de x_0 punto crítico en (a, b) está dada por el teorema de Rolle.
2. $a, b \in \mathcal{F}ix(f)$; consideramos $g(x) = f(x) - x$ para $x \in (a, b)$ y notamos que como p es atractor y a, b fijos, esto implica que $f'(p) < 1$. Aplicando el teorema de valor medio tenemos que existe $c \in (a, p), d \in (p, b)$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(p) - f(a)}{p - a} = 1 = \frac{f(b) - f(p)}{b - p} = f'(d)$$

Entonces por el principio del mínimo tenemos que $f'(p) < 0$ y por tanto existe $x_0 \in (c, d)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

3. $f(a) = b, f(b) = a$. Entonces $f^2(a) = a, f^2(b) = b$, y como p punto fijo atractor de f^2 los argumentos anteriores muestran que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0.$$

■

Corollary III.2.5. Sea f con $Sf < 0$ y supongamos que tiene N puntos críticos. Entonces tiene a lo más $N + 2$ ciclos periódicos atractores.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{P}er(f), O(p) = \{p = p_0, \dots, p_{r-1}\}$. Hay 2 posibilidades para los p_i :

1. $W_{loc}^s(p_i; f^r)$ es no limitada. Existen a lo más 2 puntos periódicos atractores de este tipo.
2. $W_{loc}^s(p_i; f^r)$ es un intervalo limitado. En este caso por anterior existe un punto crítico de f^r , y por tanto un punto crítico de f .

Esto concluye la prueba.

■

Retornando a $Q_c, c < -3/4$ notamos que existe a lo más un ciclo periódico atractor. En efecto, aplicando el corolario anterior tenemos que tiene a lo más $\deg Q'_c + 2 = 3$ ciclos atractores, donde el factor dos aparece cuando la cuenca inmediata de algún punto periódico es infinita. Recordando que dicha cuenca necesariamente se encuentra dentro de $[-p_+, p_+]$, hay a lo más 1 órbita periódica atractora.

Sabemos

- $c \in (-5/4, -3/4)$: el ciclo $\{r_+, r_-\}$ es atractor, y por tanto la órbita de cero (el único punto crítico) acumula en este ciclo. La dinámica no es particularmente complicada.

- $c = -2$; tenemos $Q_{-2}^2(0) = 1$ (que es fijo) y or tanto no hay ciclos atractores.
- $c < -2$: en este caso es fácil de mostrar que $Q_c^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$; por tanto no hay ciclos atractores.

Discutiremos los dos últimos casos con más profundidad sección final.

III.2.1. El diagrama de bifurcación.

En esta parte no nos preocuparemos demasiado con las pruebas (que son bastante elaboradas), y nos limitamos a dar un panorama general.

Pregunta. ¿Qué acontece para $c \in (-2, -5/4)$?

Respuesta. Hay infinitos parámetros donde surgen ciclos atractores. Observe que necesariamente estos ciclos atractores dejan de ser atractores conforme el parámetro disminuye y aparece otro ciclo atractor.

Definición III.2.3. Decimos que $c \in [-2, \frac{1}{4}]$ es un parámetro regular si Q_c tiene un ciclo atractor. En este caso decimos también que Q_c es hiperbólico. Denotamos $\mathcal{H} \subset [-2, \frac{1}{4}]$ el conjunto de parámetros regulares.

De nuestras consideraciones anteriores se deduce que $\mathcal{H}$ es abierto. Notar que si $c \in \mathcal{H}$ entonces el punto crítico pertenece a la cuenca inmediata del ciclo. Es buen momento aquí de introducir el diagrama de bifurcación para Q_c .

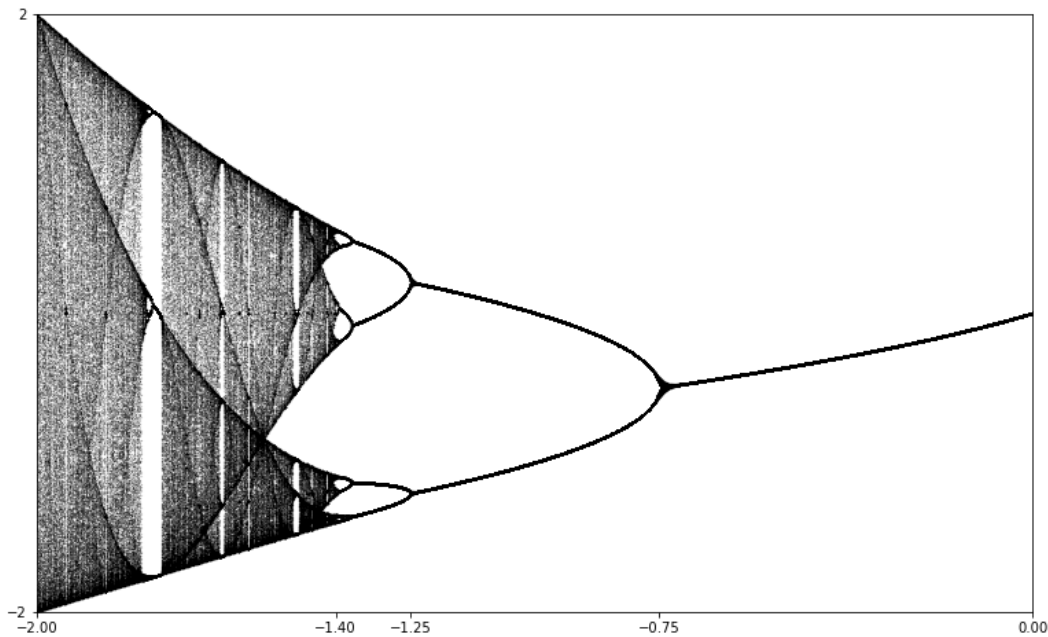


Figura III.2: Diagrama de bifurcación de la familia cuadrática. El gráfico que aparece es del libro online de Mark McLure *Chaos and Fractals: a computational approach*.

El histograma anterior muestra para cada parámetro c el conjunto ω -límite de la órbita crítica $\{Q_c^n(0)\}_{n \geq 0}$. Las franjas blancas corresponden a los parámetros regulares, mientras que las negras

parecen sugerir que la órbita crítica se distribuye en todo el intervalo I_c ; llamaremos a los mapas correspondientes a las franjas negras de *estocásticos* (ver abajo). Las franjas se alternan de una forma muy complicada y muchas de éstas son invisibles en el gráfico debido a limitaciones computacionales. De hecho vale el siguiente teorema.

Teorema III.2.6 (Lyubich). $\mathcal{H}$ es denso en $[-2, 1/4]$.

Observación III.2.2. No todo ciclo atractor aparece por medio de una bifurcación de duplicación de período. De hecho, los parámetros c_n donde hay una bifurcación de un ciclo de longitud 2^{n-1} a 2^n convergen a un parámetro $c_\infty \approx -1,401 \dots$ llamado punto de Feigenbaum (para Q_c). A mediados de los 70 Feigenbaum e independientemente Collet-Tresser descubrieron que la convergencia es exponencial, es decir, existe una constante $C > 0$ y un número $\rho \approx 4,66 \dots$ tal que

$$c_n - c_\infty \sim C\rho^{-n}$$

Lo más sorprendente es que esta constante ρ es independiente de la familia (unimodal) de mapas considerados; esto es, si tenemos otra familia de mapas diferenciables a un parámetro $(f_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1])_\lambda$ que es suficientemente regular (un único punto crítico digamos), entonces existe una cascada de bifurcación de duplicación de período (λ_n) que converge a un parámetro λ_∞ : esta convergencia es exponencial de la forma

$$|\lambda_n - \lambda_\infty| \sim \text{const.} \cdot \rho^{-n}$$

con la misma tasa ρ . Este fenómeno se denomina universalidad, y la explicación de su aparición es uno de los éxitos más importantes de la matemática contemporánea, en opinión del autor.

La dinámica de los mapas hiperbólicos es bastante bien entendida: casi todo punto converge en el futuro al correspondiente ciclo atractor.

Teorema III.2.7. Sea $c \in \mathcal{H}$ y p_c el correspondiente ciclo atractor.

- 1 Guckenheimer: $\text{Leb}W^s(p_c) = \text{Leb}(I_c)$.
- 2 Mañé: $Q_c|_{I_c \setminus W^s(p_c)}$ es uniformemente expansor (es decir, tiene derivada de módulo mayor que $a_c > 1$).

Consideramos ahora los parámetros estocásticos. En esta parte estamos siguiendo la presentación dada en [5].

Definición III.2.4. Decimos que $c \in [-2, 1/4]$ es un parámetro estocástico ($c \in \mathcal{E}$) si Q_c admite una medida invariante m_c absolutamente continua con respecto a Lebesgue. Esto es, $\phi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$m_c(\phi) = \int \phi(x) \rho_c(x) dx$$

para cierta función no-negativa² $\rho_c(x)$ con $\int h \rho_c(x) dx < +\infty$.

Con un poco de teoría ergódica uno verifica que $\mathcal{E} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Cabe preguntarse si $\mathcal{E} \neq \emptyset$: esto es cierto y de hecho $c = -2 \in \mathcal{E}$. El siguiente teorema es mucho más sofisticado.

²Y medible.

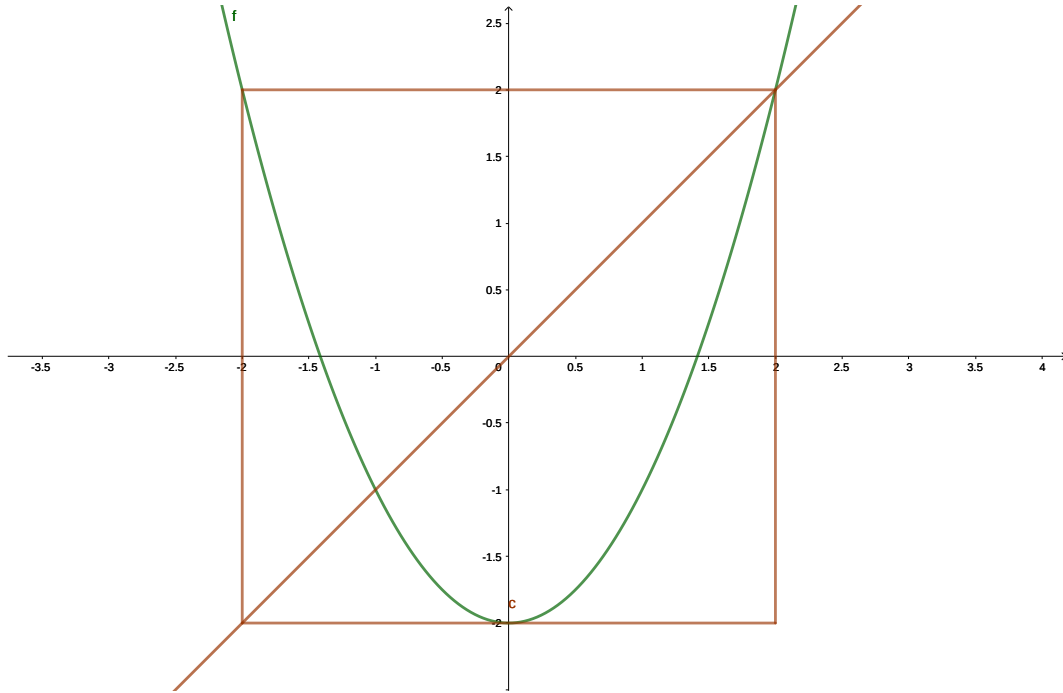


Figura III.3: Gráfico de $x \mapsto x^2 - 2$.

Teorema III.2.8 (Jakobson). $\text{Leb}(\mathcal{E}) > 0$.

Ver [NotasJakob].

Como final, enunciamos el siguiente teorema de M. Lyubich que elucida el comportamiento global en el espacio de parámetros.

Teorema III.2.9 (Lyubich). $\text{Leb}(\mathcal{E} \cup \mathcal{H}) = \text{Leb}[-2, 1/4]$.

III.3. El caso $c \leq -2$.

El lector habrá notado que el diagrama de bifurcación presentado en la figura III.2 no considera valores del parámetro menores que -2 . En esta sección explicaremos el motivo. Comenzamos primero por analizar $f = f_{-2}$ (ver figura abajo).

Consideramos el mapa $h : [0, 1] \rightarrow [-2, 2]$ definido por $h(x) = 2 \cos(\pi x)$. Queda como ejercicio verificar que h es invertible, continua y diferenciable en el intervalo $(0, 1)$; por otra parte

$$2 \cos^2(\pi x) - 2 = 2 \cos(2\pi x) = 2 \cos(\pi g(x))$$

donde $g(x) = 1 - |2x - 1|$ es un mapa tienda. Mostramos entonces que f_{-2} es conjugado con un mapa tienda. Después de toda nuestra discusión debería ser claro para el lector que el mapa g es semi-conjugado a un shift de dos símbolos, y por tanto:

Proposición III.3.1. *El mapa f_{-2} es semi-conjugado a un shift de dos símbolos Σ_2 . Cada punto de $I_{-2} = [-2, 2]$ tiene como máximo dos pre-ímagenes en Σ_2 bajo la semi-conjugación.*

Mostramos entonces que nuestro mapa f es “caótico” (por ejemplo, tiene infinitos puntos densos, es transitivo, etc). Mostremos ahora que el parámetro $c = -2$ es estocástico. Para ver esto, notamos que g preserva la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$, y por tanto f preserva la medida μ inducida por h (ver los ejercicios), es decir

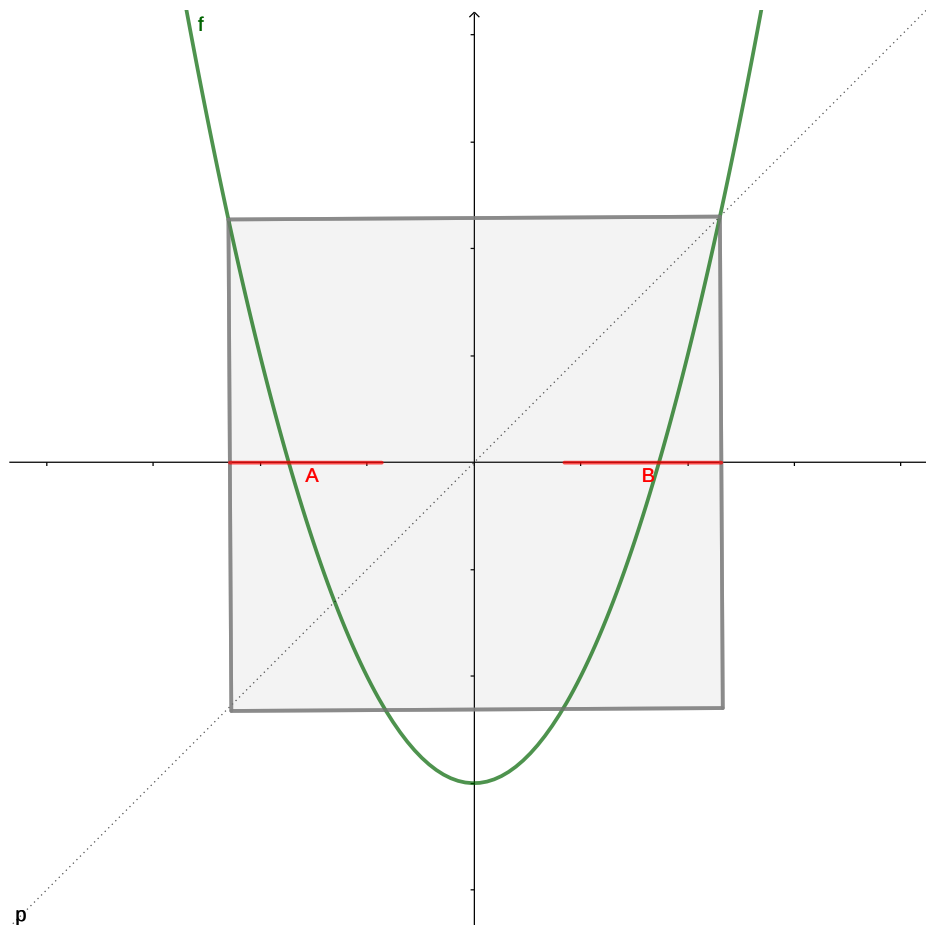
$$\mu(\varphi) = \text{Leb}(\varphi \circ h) \quad \varphi \in \mathcal{C}(M)[0, 1].$$

Por el teorema de cambio de variables, haciendo $x = h^{-1}u = \frac{1}{\pi} \text{Arcos}(\frac{u}{2})$, $dx = \frac{-1}{\pi\sqrt{4-u^2}} du$ y por tanto

$$\mu(\varphi) = \int_0^1 \varphi(hx) dx = \int_{-2}^2 \varphi(u) \frac{1}{\pi\sqrt{4-u^2}} du$$

Deducimos que μ es absolutamente continua respecto a Lebesgue (la densidad es $\rho(u) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-u^2}}$), y por tanto $c = -2$ es estocástico.

Por último consideraremos el caso $c < -2$: veremos que todos estos mapas tienen un comportamiento muy similar. Comenzamos por estudiar la gráfica típica de uno de estos mapas, ver figura abajo.



No todo punto de I_c tiene su órbita completamente contenida en I_c : por ejemplo, observando la gráfica vemos que $Q_c(0) \notin I_c$, y por tanto $Q_c^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Como la dinámica de estos puntos es esencialmente trivial, nos concentramos en el conjunto

$$\{x \in I_c : Q^n(x) \in I_c \forall n \geq 1\} = \cap_{n=0}^{+\infty} Q_c^{-n}(I_c) := \Lambda_c.$$

Este es un conjunto compacto, invariante, y es el mayor tal conjunto con dichas propiedades (ejercicio). Decimos que Λ_c es el *maximal invariante* de Q_c .

Estudiaremos pues $Q_c|_{\Lambda_c} \rightarrow \Lambda_c$. De la figura vemos también que existen dos intervalos cerrados $A, B \subset I_c$ tales que

- $A \cap B = \emptyset$.
- $Q_c(A) = Q_c(B) = I_c$
- $x \notin A \cup B \rightarrow Q_c(x) \notin I_c$.

Deducimos

$$\Lambda_c = \bigcap_{n=1}^{+\infty} Q_c^{-n}(A \cup B),$$

y con esto no es difícil de verificar que Λ es un conjunto de Cantor. Más aún, como $|Q'_c(x)| > 1$ para todo $x \in A \cup B$, el tipo de argumento usado para estudiar mapas expansores en el capítulo anterior puede aplicarse en esta situación para deducir lo siguiente.

Teorema III.3.2. *Si $c < -2$ el conjunto maximal invariante Λ_c de Q_c es un conjunto de Cantor con $\text{Leb}(\Lambda_c) = 0$ y $Q_c|_{\Lambda_c}$ es conjugada al shift de dos símbolos Σ_2 .*

Ejercicios

Observación: Los ejercicios marcados con un asterisco en general requieren alguna herramienta no elemental de análisis (que puede ser encontrada por ejemplo en [8]).

Capítulo 1

1. 1)

a) Sea f endomorfismo de un espacio métrico M (es decir, un mapa continuo³ de M en M ; de ahora en más notaremos esta situación mediante $f \in \text{End}(M)$). Mostrar que x es pre-periódico $\Leftrightarrow |O_f^+(x)| < \infty$.

b) Mostrar que

- $\mathcal{P}er_m(f)$ es cerrado para todo $m \in \mathbb{N}$.
- $\{x : \text{per}(x) = m\}$ no es necesariamente cerrado.

2)* Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Mostrar que si $\mathcal{P}er(f) = \mathbb{C}$ entonces f tiene orden finito, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = Id$.

3)* Sea $f \in \text{End}(M)$. Mostrar que $O^+(x)$ es compacta si y solamente si es finita (y por tanto, x pre-periódico).

4) Sea $f \in \text{End}(M)$.

a) $\omega_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{O^+(f^n x)}$

b) $\alpha_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{O^-(f^{-n} x)}$ (asumiendo que f homeomorfismo).

5) Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ homeomorfismo que invierte el orden. Mostrar que f tiene un único punto fijo y describir la dinámica de f .

6)* Demuestre el teorema I.4.2.

Capítulo 2

1) Mostrar que si $f \in \text{Homeo}(\mathbb{T})$ e F es un levantamiento de f , entonces existe ϕ 1-periódica tal que

- $F(x) = x + \phi(x)$ para todo x , si f preserva orientación.

³Observación: Algunos autores usan la palabra “endomorfismo” para referirse a mapas sobreyectivos, o mismo a mapas de recubrimiento

- $F(x) = -x + \phi(x)$ para todo x , si f invierte orientación.

2)* Demuestre el teorema II.1.3

3) Demuestre el lema II.2.5

4) Demuestre el lema II.3.3

5) Demuestre los lemas II.3.5 y II.3.6.

6) Describir los puntos periódicos del shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ y mostrar que es transitivo. Deducir que si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un mapa expansor del tipo $f(x) = m \cdot x \pmod{1}$, entonces f es transitivo y tiene puntos periódicos densos⁴.

7) Considere el mapa $f(x) = 3x \pmod{1}$ en $\mathbb{S}^1$. Encontrar un conjunto $K \neq \mathbb{S}^1$ cerrado, f invariante y no-numerable.

8) Mostrar que si α es irracional entonces toda órbita de $r_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es densa (en estos casos decimos que el mapa es minimal).

Capítulo 3

1) Considere la familias a un parámetro $\{f_\mu : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]\}_{\mu \in (0, 2]}$ y $\{g_\gamma : [1 - \frac{\gamma}{4}, \gamma 4] \rightarrow [-1, 1]\}_{\gamma \in (2, 4]}$ dadas por

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$$

$$g_\gamma(x) = \gamma x(1 - x)$$

Mostrar que el mapa $h(x) = (\frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}$ conjug a el mapa f_μ con g_γ , para $\mu = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma}{2}$.

2) Mostrar que si $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es un polinomio de grado 2, entonces es conjugado a un Q_c para algún c .

3) Mostrar que la familia cuadrática $\{Q_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ tiene una bifurcación en el parámetro $c = 1/4$.

4) Mostrar que $W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_{\text{loc}}^s(x)$. Mostrar también que $W^s(x)$ es abierto y además $W_{\text{loc}}^c(x)$, $W^s(x)$ son invariantes.

5) Demuestre el Lema III.2.2

6) Complete los detalles de la prueba del teorema III.3.2.

7) Muestre que un parámetro hiperbólico no puede ser estocástico. Muestre también que c_∞ no es hiperbólico.

Nota: c_∞ tampoco es estocástico; la prueba requiere un poco más de tecnología de lo que vimos en el curso.

8) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomio de grado mayor que 1.

a) Mostrar que si f tiene todas sus raíces reales, entonces f' también.

⁴Sí, la frase no tiene sentido. Pero es muy común.

b) Mostrar que si f' tiene todas sus raíces reales, entonces $Sf < 0$.

Este ejercicio muestra que polinomios reales de grado mayor que uno con raíces reales tiene Schwartziana negativa.

Bibliografía

- [1] John B. Conway. *A first course in analysis*. CAMBRIDGE UNIV PR, 2017. 375 páginas. ISBN: 1107173140 (véase página 3).
- [2] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems*. Taylor & Francis Inc, 1992. 340 páginas (véase página 3).
- [3] Evan Dummit. *Dynamics, Chaos and Fractals*. 2015 (véase página 3).
- [4] Elon Lages Lima. *Curso de analise vol 2*. IMPA, 1999. ISBN: 8524401087 (véase página 3).
- [5] M. Lyubich. «The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos». En: *Notices of the American Mathematical Society* 7.9 (2000) (véase página 39).
- [6] J. P. Eckmann Pierre Collet. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhauser Boston, 2009 (véase página 3).
- [7] Jean-Pierre Eckmann Pierre Collet. *Concepts and results in chaotic dynamics: a short course*. Springer Berlin Heidelberg, 2006. 244 páginas (véase página 3).
- [8] Charles C. Pugh. *Real Mathematical Analysis*. Editado por Springer. Springer, Berlin, 2015. ISBN: 3319177702 (véanse páginas 3, 43).