УДК 519.7

И. Б. ФУРТАТ
ИПМаш РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

А. Н. НЕХОРОШИХ
Университет ИТМО, Санкт-Петербург

РОБАСТНЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Предлагается робастный алгоритм управления линейными объектами в условиях параметрической и структурной неопределенности и внешнего неконтролируемого возмущения. Полученный алгоритм обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с требуемой точностью. Для оценки производных выходного скалярного сигнала в системе управления используется наблюдатель, основанный на левых разностях.

Введение

Проектирование простых схем управления в условиях параметрической и структурной неопределенности и измерения только выхода объекта является актуальной задачей современной теории и практики автоматического регулирования. Для построения таких схем управления эффективными являются способы адаптивного и робастного управления, где на сегодняшний день предложено достаточно много решений [2]. Если относительная степень объекта больше единицы, то для реализации адаптивных и робастных систем управления необходимы оценки производных входа и выхода объекта, для получения которых, как правило, используются различные наблюдатели.

В [9] предложен фильтр Калмана, оценивающий вектор состояния динамической системы при использовании ряда неполных и зашумленных измерений. В [3] рассмотрено применение фильтра Калмана в задачах обработки навигационной информации. Для оценки вектора состояния модели объекта с известными параметрами при отсутствии внешнего возмущения широко используется наблюдатель Люенбергера [10]. В условиях параметрической неопределенности модели объекта и наличия внешних возмущений в [7] был предложен робастный наблюдатель с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). Другой вид наблюдателя с большим коэффициентом усиления позже был рассмотрен в [1]. В [11, 12] предложен робастный наблюдатель на скользящем режиме (sliding-mode observer). В [8] разработан нелинейный наблюдатель расширенного состояния (nonlinear extended state observer) основанный на обобщении наблюдателя с большим коэффициентом усиления и наблюдателя на скользящем режиме. В [14] представлен обзор наблюдателей [7, 8, 10-12], примеры расчета и реализации для динамической системы второго порядка, а также приведен сравнительный анализ для каждого наблюдателя при различных видах неопределенностей (параметрическая неопределенность, внешние возмущения и шумы).

Робастные наблюдатели [1, 7, 8, 10-12] нашли широкое применение при синтезе систем управления в условиях неопределенности. Например, в [13] строит-

ся закон управления с оценкой производных выхода объекта, которые реализуются с помощью наблюдателя на скользящем режиме [10, 12], где порядок наблюдателя равен размерности вектора состояния модели объекта. В [6] для синтеза системы стабилизации нелинейных динамических объектов используется закон управления, зависящий от оценок производных выхода объекта, которые получены с помощью наблюдателя с большим коэффициентом усиления [7] и порядком, равным размерности вектора состояния модели. В [1] синтезируется робастный закон управления по ошибке слежения, где для оценки производных сигнала ошибки слежения используется наблюдатель с динамическим порядком, равным $\gamma - 1$, где γ – относительная степень объекта управления. В [5] синтезирована робастная система управления с компенсацией внутренних и внешних возмущений с использованием вспомогательного контура. Для оценки производных сигнала, несущего в себе информацию о возмущениях объекта, в [5] используется наблюдатель [7], порядок которого равен $\gamma - 1$.

Анализ работ [1, 5-8, 11-14] показал, что разработчики стремятся получить как простые в расчете регуляторы, так и регуляторы с невысоким динамическим порядком. Причем при управлении объектами с $\gamma > 1$ еще не получены регуляторы, у которых динамический порядок был бы меньше $\gamma - 1$. Предлагаемая работа посвящена построению простого регулятора, основанного на использовании обратных (левых) разностей.

В докладе рассматривается построение робастной системы управления по выходу линейными динамическими объектами в условиях параметрической и структурной неопределенности и действия внешних ограниченных возмущений. Для оценки производных в системе управления используется наблюдатель, основанный на вычислении обратных разностей. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) + S(p)y(t-\tau) = R(p)u(t) + f(t), \qquad (1)$$

где $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ – скалярные выход, вход и возмущающее воздействие соответственно, $|f(t)| \le \alpha$, α – известна; τ – запаздывание в канале состояния; $Q(p) = p^n + q_{n-1}p^{n-1} + ... + q_0$, $S(p) = s_l p^l + s_{l-1}p^{l-1} + ... + s_0$, $R(p) = r_m p^m + r_{m-1}p^{m-1} + ... + r_0$ – линейные стационарные дифференциальные операторы порядка n, $l < n$ и m соответственно; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Требуется найти такой закон управления, чтобы при любых начальных условиях все сигналы в замкнутой системе были ограниченными функциями времени, и дополнительно выполнялось целевое условие

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \;\; T > 0 : \; |y - y_m| < \delta \text{ при } t > T, \qquad (2)$$

где $y_m(t)$ – гладкий эталонный сигнал, $T > 0$ – время переходного процесса. Данная постановка задачи является распространенной в теории робастного управления, например, рассматривалась в работе [1].

При решении задачи на объект управления наложены следующие ограничения.

1. Коэффициенты операторов $Q(p)$, $S(p)$ и $R(p)$ – неизвестные числа, принадлежащие известному компактному множеству Ξ.

2. Полином $R(\lambda)$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная.

3. В системе управления не доступны измерению производные сигнала $y(t)$.

4. Известна верхняя оценка $\bar{\gamma}$ относительной степени $\gamma=n-m$, т.е. $\bar{\gamma} \geq \gamma$.

Управление структурно определенными объектами

Сначала рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q(p)$ и $R(p)$ известны. Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e = y - y_m$ в виде

$$Q(p)e(t) = R(p)u(t) + f(t) - S(p)y(t-\tau) - Q(p)y_m(t). \quad (3)$$

Из постановки задачи производные $y(t)$ не доступны измерению. Исходя из этого, зададим закон управления в форме [6, 12]

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, а коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_\gamma$ выбираются так, чтобы полином $D(\lambda) = d_\gamma \lambda^\gamma + d_{\gamma-1}\lambda^{\gamma-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ был гурвицевым, $\bar{e}^{(i)}(t)$ – оценка i-й производной сигнала $e(t)$, $i = 0,1,\ldots,\gamma$. Последующий синтез системы управления будем осуществлять с помощью наблюдателя производных на базе обратных разностей.

Подставим (4) в (3) и перепишем (3) в виде:

$$F(p)e(t) = \psi(t), \quad (5)$$

где: $$\psi(t) = f(t) - S(p)y(t-\tau) - Q(p)y_m(t) + \alpha R(p)\left(D(p)e(t) - \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t) \right),$$

$F(p) = Q(p) + \alpha R(p)D(p)$. Поскольку известно множество Ξ, то всегда существуют число $\alpha > 0$ и полином $D(\lambda)$ такие, что полином $F(\lambda)$ будет гурвицевым.

Для реализации закона управления (4) будем определять оценки производных $\bar{e}^{(i)}(t)$ с использованием простейшего алгоритма численного дифференцирования, основанного на вычислении левых разностей:

$$\begin{aligned} &\bar{e}(t) = e(t),\ \bar{e}^{(1)}(t) = \frac{\bar{e}(t) - \bar{e}(t-h)}{h}, \\ &\bar{e}^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}^{(1)}(t) - \bar{e}^{(1)}(t-h)}{h}, \ldots, \bar{e}^{(\gamma)}(t) = \frac{\bar{e}^{(\gamma-1)}(t) - \bar{e}^{(\gamma-1)}(t-h)}{h}, \end{aligned} \quad (6)$$

где h – приращение временно́го аргумента при выполнении процедуры численного дифференцирования.

Подставив (6) в (4), получим закон управления

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j e(t - jh) \right]. \quad (7)$$

Представим функцию $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = \alpha R(p) g(t) + \varphi(t),$$

где $\varphi(t) = f(t) - S(p) y(t-\tau) - Q(p) y_m(t)$, $g(t) = D(p) e(t) - \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t)$. Тогда уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + \alpha B_1 g(t) + B_2 \varphi(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t), \tag{8}$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n]^T$, $\varepsilon_i = e^{(i-1)}$, $i = \overline{1,n}$; A, B_1, B_2 и L – матрицы, полученные при переходе от (5) к (8). Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (7) обеспечивает выполнение цели управления (2).

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия предположений 1-3. Существуют числа* $\alpha > 0$ *и* $h > 0$ *такие, что* $W > 0$ *и* $R_{ij} > 0$, *где*

$$W = Q - 2\alpha P B_1 \underline{\rho}^{\mathrm{T}} + 2\alpha P B_1 L \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} - 0{,}5\alpha\gamma(\gamma+1)\chi P B_1 B_1^{\mathrm{T}} P - \frac{2\chi}{h} P B_2 B_2^{\mathrm{T}} P - 0{,}5\gamma(\gamma+1) N_{ij},$$

$$R_{ij} = N_{ij} - \alpha\chi^{-1}\left(\frac{d_i}{h^i} C_i^j\right)^2 L^{\mathrm{T}} L > 0, \quad i = 1, \ldots, \gamma, \quad j = 1, \ldots, i, \quad P = P^{\mathrm{T}} > 0$$

– решение уравнения $A^{\mathrm{T}} P + PA = -Q$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $N_{ij} = N_{ij}^{\mathrm{T}} > 0$, $\underline{\rho}$ *– вектор, составленный из коэффициентов многочлена* $\underline{R}(\lambda) D(\lambda)$, $\underline{R}(\lambda)$ *– многочлен с наименьшими коэффициентами полинома* $R(\lambda)$, $\chi > 0$ *– достаточно малое число. Тогда система управления, представленная законом управления* (7), *обеспечивает выполнение целевого условия* (2) *и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.*

Доказательство утверждения аналогично доказательству утверждения в [4], так как структура уравнения (8) подобна структуре соответствующего уравнения в [4]. Идея доказательства сводится к приведению уравнения замкнутой системы (8) к системе сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с малым коэффициентом h.

Управление структурно неопределенными объектами

Теперь рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q(p)$ и $R(p)$ неизвестны.

Цель управления состоит в выполнении условия (2).

Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e = y - y_m$ в виде (3). Зададим закон управления

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\bar{\gamma}} d_i \bar{e}^{(i)}(t), \tag{9}$$

где $\alpha > 0$, а коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_\gamma$ выбираются так, чтобы полином $D(\lambda) = d_{\bar{\gamma}} \lambda^{\bar{\gamma}} + d_{\bar{\gamma}-1} \lambda^{\bar{\gamma}-1} + \ldots + d_1 \lambda + d_0$ был гурвицевым. Подставив (9) в (3), получим уравнение вида (5). Очевидно, что всегда существуют число $\alpha > 0$ и полином $D(\lambda)$ такие, что полином $F(\lambda)$ будет гурвицевым.

Для оценки производных сигнала $e(t)$ воспользуемся следующими уравнениями:

$$\bar{e}(t)=e(t),\ \bar{e}^{(1)}(t)=\frac{\bar{e}(t)-\bar{e}(t-k_1h)}{k_1h},$$
$$\bar{e}^{(2)}(t)=\frac{\bar{e}^{(1)}(t)-\bar{e}^{(1)}(t-k_2h)}{k_2h},\ \ldots,\ \bar{e}^{(\bar{\gamma})}(t)=\frac{\bar{e}^{(\bar{\gamma}-1)}(t)-\bar{e}^{(\bar{\gamma}-1)}(t-k_{\bar{\gamma}}h)}{k_{\bar{\gamma}}h}. \quad (10)$$

Здесь $\bar{e}^{(i)}(t)$, $i=1,...,\bar{\gamma}$ – оценка i-й производной сигнала $e(t)$, $1\ge k_1>k_2>...>k_{\bar{\gamma}}>0$ – коэффициенты, используемые с целью уменьшения приращений аргумента t при численном дифференцировании.

Введем множество $\Theta=\{i=1,...,\bar{\gamma}\}$. Подставив (10) в (4), получим:

$$u(t)=-\alpha\left[d_0e(t)+d_1\frac{e(t)-e(t-k_1h)}{k_1h}+...+\frac{d_{\bar{\gamma}}}{h^{\bar{\gamma}}\prod_{i=1}^{\bar{\gamma}}k_i}\left(e(t)-\sum_{i_1\in\Theta}e(t-k_{i_1}h)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{\substack{i_1,\,i_2\in\Theta,\\ i_1<i_2}}e(t-h(k_{i_1}+k_{i_2}))+...+\sum_{\substack{i_1,\,i_2,\,...,\,i_{\bar{\gamma}}\in\Theta,\\ i_1<i_2<...<i_{\bar{\gamma}}}}e(t-h(k_{i_1}+k_{i_2}+...+k_{i_{\bar{\gamma}}}))\right)\right]. \quad (11)$$

В результате уравнение замкнутой системы будет представлено выражением (8), где матрицы A, B_1, B_2 и L получены при переходе от (5) к (8) с учетом того, что $D(\lambda)=d_{\bar{\gamma}}\lambda^{\bar{\gamma}}+d_{\bar{\gamma}-1}\lambda^{\bar{\gamma}-1}+...+d_1\lambda+d_0$.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия предположений* 1-4. *Существуют числа* $\alpha>0$ *и* $h>0$ *такие, что*

$$W=Q-2\alpha PB_1\underline{\rho}^{\mathrm{T}}+2\alpha PB_1L\sum_{i=0}^{\bar{\gamma}}\frac{d_i}{h^i\prod_{j=0}^{i}k_j}-0{,}5\alpha\gamma(\gamma+1)\chi PB_1B_1^{\mathrm{T}}P-\frac{2\chi}{h}PB_2B_2^{\mathrm{T}}P-$$
$$-0{,}5\gamma(\gamma+1)N_{ij}>0,$$

$$R_{ij}=N_{ij}-\alpha\chi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\bar{\gamma}}\frac{d_i}{h^i\prod_{j=1}^{i}k_j}\right)^2L^{\mathrm{T}}L>0,\ \ i=1,...,\gamma,\ \ j=1,...,i,$$

$P=P^{\mathrm{T}}>0$ – *решение уравнения* $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$, $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$, $N_{ij}=N_{ij}^{\mathrm{T}}>0$,

$\underline{\rho}$ - *вектор, составленный из коэффициентов многочлена* $\underline{R}(\lambda)D(\lambda)$, $\underline{R}(\lambda)$ – *многочлен с наименьшими коэффициентами полинома* $R(\lambda)$, $0<\chi<<1$, $k_0=1$. *Тогда система управления, представленная законом управления* (11), *обеспечивает выполнение целевого условия* (2) *и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.*

Заключение

Предложено решение задачи робастного управления линейными динамическими объектами в условиях параметрической и структурной неопределенностей, а также внешних неконтролируемых ограниченных возмущений. В отличие от [1, 5−14], в настоящей работе для оценки производных использовался наблюдатель, приближенное дифференцирование в котором осуществлялось с помощью левых разностей. Полученный алгоритм компенсирует неопределенности и возмущения с заданной точностью, зависящей от выбора коэффициентов полинома $D(\lambda)$ и коэффициента α, а также величины параметра h, определяющего точность оценки производных сигнала $e(t)$. Так как предлагаемый алгоритм управления использует звенья с запаздыванием, то их практическая реализация может быть осуществлена на базе ЭВМ с использованием специального программного обеспечения, например MatLab.

Работа проводилась при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)), гранта РФФИ (16-08-00282, 16-08-00686), гранта МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и гранта Правительства РФ (074-U01).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобцов, А.А.** Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // Автоматика и Телемеханика. - 2003. - №. 6. - С. 104-113.
2. **Мирошник, И.В.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И.В. Мирошник, В.О. Никифоров, А.Л. Фрадков СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
3. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Том Часть 2 Введение в теорию фильтрации. – СПб: ГНЦ РФ - ЦНИИ "Электроприбор", 2012. – 417 с.
4. **Фуртат, И.Б.** Робастный статический алгоритм управления линейными объектами // Автоматика и Телемеханика. - 2015. - № 3. - С. 94–107.
5. **Цыкунов, А.М.** Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и Телемеханика. - 2007. - № 7. - С. 103-115.
6. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 9. P. 1672-1687.
7. Esfandiary F., Khalil H.K. Output feedback stabilization of fully linearizable systems // Int. J. Control. 1992. V. 56. No. 5. P. 1007-1037.
8. **Han J.** A class of extended state observers for uncertain system // Control Decision. 1995. V. 10. No. 1. P. 85-88.
9. **Kalman R.E.** A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME – J. Basic Engineer. 1960. No. 82 (Ser. D). P. 35-45.
10. **Luinberger D**. Observers for multivariable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. V. AC-11. No. 2. P. 190-197.
11. **Slotine J.J.E., Hedrick J.K., Misawa E.A.** On sliding observers for nonlinear systems // J. Dynam. Syst., Measurement, Control. 1987. V. 109. P. 245-252.
12. Utkin V.I. Sliding-modes in control optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
13. **Veluvolu K.C., Kim M.Y., Lee D.** Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation // Int. J. Syst. Sci. 2011. V. 42. No. 7. P. 1065-1074.
14. **Wang W., Gao Z.** A comparison study of advanced state observer design techniques // Proc. Amer. Control Conf. 2003. P. 4754-4759.